UMinho | 2010

Maria do Carmo Fernandes da Cunha

Os Motores de Busca e a Inteligência Colectiva: Um estudo exploratório com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria do Carmo Fernandes da Cunha

A Influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12º ano de escolaridade em probabilidade condicionada

Outubro de 2010

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria do Carmo Fernandes da Cunha

A Influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12º ano de escolaridade em probabilidade condicionada

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências da Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor José António Fernandes

Outubro de 2010

DECLARAÇÃO

Nome: Maria do Carmo Fernandes da Cunha
Endereço electrónico: carmo.fernandes@gmail.com
Telefone: 912816502
Número do Bilhete de identidade: 3461312

Título da Tese: A Influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12° ano de escolaridade em probabilidade condicionada

Orientador:
Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2010

Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Universidade do Minho 6 de Outubro de 2010

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor José António Fernandes os meus sinceros agradecimentos por todos os seus conselhos, incentivos e criticas, pela compreensão, a paciência e amizade que sempre demonstrou para comigo ao longo da concretização deste estudo.

Às professoras e aos seus alunos, que participaram neste estudo, agradeço a colaboração imprescindível para a sua consecução.

À Direcção da Escola onde decorreu a experiência, agradeço a abertura e disponibilidade demonstradas.

À minha grande amiga Paula, que nunca me deixou desanimar, incentivando-me e encorajando-me.

À minha Mãe, que com todo o amor e dedicação, me "obrigou" e deu força para prosseguir e concluir este estudo.

Aos meus filhos que tanto apoio, incentivo, compreensão e amor me concederam.

A INFLUÊNCIA DO ENSINO NOS RACIOCÍNIOS DE ALUNOS DO 12° ANO DE ESCOLARIDADE EM PROBABILIDADE CONDICIONADA

Maria do Carmo Fernandes da Cunha
Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática
Universidade do Minho, 2010

RESUMO

Neste estudo investigou-se o impacto do ensino regular nos raciocínios de alunos do 12° ano de escolaridade em problemas de probabilidade condicionada e independência, centrado nas três seguintes questões de investigação: 1 – Que respostas e raciocínios apresentam os alunos do 12° ano de escolaridade na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois deste conceito ter sido leccionado?; 2 – O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12° ano altera as respostas e raciocínios usados pelos alunos?; e 3 – Que tipo de ensino é proporcionado aos alunos do 12° ano de escolaridade para desenvolverem o conceito de probabilidade condicionada?

Na investigação realizada adoptou-se uma abordagem fundamentalmente quantitativa, com um desenho descritivo e comparativo. No estudo participaram 115 alunos do 12° ano de escolaridade de uma escola secundária da cidade de Braga e as duas professoras que leccionavam as turmas a que os alunos pertenciam. Os dados usados no estudo resultaram da resolução de um teste, aplicado aos alunos imediatamente antes do ensino do tema (pré-ensino) e imediatamente depois do ensino do tema (pós-ensino), bem como da observação das duas aulas dedicadas pelas professoras ao ensino do tema, que foram audiogravadas, e de notas de campo elaboradas pela investigadora no desenrolar das aulas e registadas em suporte de papel. A recolha dos dados foi efectuada no final do mês de Setembro e início do mês de Outubro de 2009, altura em que foi leccionado o tema de probabilidade condicionada e independência.

Em termos de resultados obtidos, evidencia-se uma aquisição do conceito de probabilidade condicionada muito pouco profunda, quer antes quer após o ensino do conceito, o que revela, por um lado, a dificuldade do tema e a sua natureza contra-intuiva e, por outro lado, a pouca influência que o ensino regular teve na alteração do raciocínio dos alunos.

INFLUENCE OF TEACHING ON 12th GRADERS' REASONINGS ON CONDITIONAL PROBABILITY

Maria do Carmo Fernandes da Cunha
Master of Arts, Supervision in Mathematics Education
Minho University, 2010

ABSTRACT

In this study we tried to find out whether there was an impact of teaching in the reasoning of 12th Grade students concerning problems of conditioned probability and independence focusing on three investigation questions: 1 – What kind of answers and reasoning do 12th Grade students give when they resolve problems of conditioned probability before and after they have been taught these concepts?; 2 – Does the teaching of conditioned probability in the 12th Grade influence the answers and the reasoning used by the students?; and 3 – What kind of teaching is provided to 12th Grade students to make them develop the concept of conditioned probability?

In our investigation we relied mostly on a quantitative methodology, based on a descriptive and comparative design. In this study participated 115 12th Grade students from a Secondary School in Braga and their two Mathematics teachers. The data we used were the result of a test resolved by the referred students immediately before (pre-teaching) and immediately after (post-teaching) the teaching of the theme as well as the ones brought about in class observation. This was done when the two teachers were dealing with the theme. These classes were audio-recorded, and some field notes were also taken and duly registered.

The data were collected between the end of September and the beginning of October 2009, when the theme of conditioned probability and independence was being addressed.

Regarding the results, it becomes evident that there is a very superficial acquisition of the concept of conditioned probability, both before and after the teaching of the concept. This shows both the difficulty of the theme, its anti-intuitive character, and the little influence of formal teaching in transforming the way student reason.

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

É fundamental para entender a realidade que nos rodeia saber lidar com a incerteza, compreender as relações de causa efeito e como estas relações interferem na nossa capacidade de lidar com a realidade. Gimenez (2007) considera que o estudo do tema das probabilidades na escola é essencial, pois o pensamento estocástico revela-se importante para poder entender o mundo que nos rodeia ao permitir-nos compreender a incerteza. Também, segundo Albert (2006), os conceitos básicos de probabilidade devem ser ensinados porque no nosso dia-a-dia a incerteza é omnipresente e a probabilidade é usada como forma de a medir.

O ensino da estocástica toma assim uma relevância enorme pois é aqui que o estudo da incerteza é realizado. E porque na realidade somos sistematicamente confrontados com relações de causa e efeito, com a necessidade de fazer predições sob determinadas situações, a probabilidade condicionada é pois de enorme relevância ser estudada.

Neste capítulo, constituído por duas secções, apresenta-se a problemática do estudo, incluindo as questões de investigação, e a relevância do estudo realizado.

1.1.Problema e questões de investigação

No nosso dia-a-dia, as situações de incerteza com que temos de lidar são constantes. É frequente sermos confrontados com situações em que, devido à sua imprevisibilidade, não podemos atribuir-lhe uma explicação causal.

O estudo do tema das probabilidades não é fácil pois envolve conceitos contra-intuitivos, e a probabilidade condicionada, porque formaliza a mudança do nosso grau de crença quando dispomos de nova informação, ainda se transforma num problema mais difícil de adquirir pelos alunos.

Conforme está estabelecido no programa de matemática A

> as probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para previsões baseadas na incerteza. Este estudo pode ser em grande parte

> experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística. (Ministério da Educação, 2002, p. 2)

Segundo está definido nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (National Council of Teachers of Mathematicas [NCTM], 2007), a probabilidade enquanto disciplina por si só está relacionada com outras áreas da matemática, sobretudo com os números e a geometria. Os conceitos de probabilidade funcionam como base para a recolha, descrição e interpretação de dados, e considera-se que

> os alunos do 2º e 3º ciclos deverão aprender e utilizar uma terminologia apropriada e deverão ser capazes de calcular probabilidades de ocorrências compostas simples como, por exemplo, o número de vezes que se espera obter duas caras, quando duas moedas são lançadas simultaneamente 100 vezes. (NCTM, 2007, p. 55)

Para os alunos do ensino secundário, as normas defendem que estes devem calcular as probabilidades de ocorrências compostas e compreender os factores condicionantes e acontecimentos independentes. Considera ainda que, ao longo dos anos, os alunos deverão ser capazes de transitar de situações em que a probabilidade de um acontecimento pode ser calculada directamente para situações em que a amostragem e a simulação possam ser úteis na quantificação da probabilidade de um determinado resultado (NCTM, 2007).

Neste contexto, propusemo-nos a realizar um estudo em que analisássemos a forma como os alunos raciocinam perante situações de probabilidades condicionadas, e de que forma o ensino desta temática altera os raciocínios por eles elaborados.

Estudo realizados sobre os raciocínios elaborados no cálculo das probabilidades condicionadas demonstram a existência de concepções intuitivas erradas que interferem no cálculo das probabilidades. Alguns destes erros estão bastante enraizados e um ensino formal do conceito pode não ser suficiente para os superar, sendo necessário que as pessoas se tornem conscientes das dificuldades e aprendam a abordar os problemas de probabilidades condicionadas com ferramentas adequadas (Díaz, 2009).

Conscientes das dificuldades com que os alunos se deparam para assimilar os conceitos importantes desta temática e do seu grau de importância para a sua formação, designadamente na sua capacidade de compreender e interpretar casos de incerteza, formularam-se as seguintes questões de investigação:

1 – Que respostas e raciocínios apresentam os alunos do 12.º ano de escolaridade na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois deste conceito ter sido leccionado?

2 – O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12.º ano altera as respostas e raciocínios usados pelos alunos?

3 – Que tipo de ensino é proporcionado aos alunos do 12.º ano de escolaridade para desenvolverem o conceito de probabilidade condicionada?

1.2. Relevância do estudo

No nosso quotidiano lidamos constantemente com fenómenos cujos resultados são imprevisíveis, para os quais não existe uma causa nem uma explicação certa para a sua ocorrência. Somo confrontados constantemente com o acaso, com situações aleatórias para os quais não existe uma justificação. Branco (2002, citado por Carvalho & Fernandes, 2005, p. 71) consideram que "o acaso gera a incerteza, e esta é um ingrediente presente nos mais diversos aspectos da vida". Prever acontecimentos futuros é uma realidade que todo o cidadão tem de enfrentar no seu dia-a-dia, desde prever situações climatéricas, planificar uma viagem, fazer um diagnóstico, prever o comportamento da bolsa, etc. Dada a frequência com que somos confrontados com situações deste tipo, onde a noção de probabilidade, entendida como um modo de medir a incerteza está presente, Carvalho e Fernandes, (2005) destacam a relevância de promover experiências na escola, onde os alunos desenvolvam noções intuitivas deste conceito adequadas às suas vivências, explorando situações que os levem a adquirir níveis mais elaborados das intuições iniciais.

Fischbein (1975) considera que é necessário que se proceda a um ensino experimental, para que as dificuldades sentidas pelas pessoas não permaneçam de forma tão constante e permanente ao longo do tempo, pois estas dificuldades vão continuar a influenciar as pessoas erradamente nas suas decisões e pensamentos.

Way (2003) considera que existem evidencias claras que o pensamento probabilístico está ligado ao desenvolvimento cognitivo e que a habilidade da criança de fazer julgamentos envolvendo o acaso se realiza através de etapas. Segundo esta autora, não há todavia consenso entre os autores no que concerne à natureza do pensamento em cada um dos estádios, bem como no intervalo de idade que os constituem, pelo que considera que é importante que se continue a investigar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as situações de incerteza que lhes são colocadas. Quando se conhecer e compreender as formas como as resolvem, poder-se-á definir intervalos de idades e, assim, criar estratégias mais adaptadas para os professores utilizarem para desenvolver nos alunos os conhecimentos nesta área.

É fundamental para a educação que o desenvolvimento da compreensão seja uma ferramenta importante, pois o domínio seguro de conceitos e procedimentos permitem a resolução eficaz de problemas novos e de novas situações. Em matemática esta capacidade é particularmente desafiante, pois o que verificamos na nossa prática é que os alunos apenas tentam memorizar fórmulas e procedimentos para resolver situações bem definidas e muito dificilmente são capazes de aplicar os conceitos adquiridos a situações reais com que são e vão ser confrontados em toda a sua vida. É pois necessário desenvolver nos alunos a capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos a situações reais e que lhes possam surgir em contexto de vida real.

Para melhorar as habilidades intelectuais os alunos devem reconhecer os limites da resolução espontânea dos problemas e desenvolver intuições secundárias incorporando e automatizando o conhecimento normativo que compete à escola promover e, uma das áreas onde é mais difícil atingir este objectivo, é nas probabilidades, pois por um lado as leis das probabilidades são muitas vezes contra-intuitivas, e por outro lado todos nós desenvolvemos concepções e expectativas estereotipadas com base nas nossas experiências, e que frequentemente conduzem a julgamentos errados.

Actualmente as probabilidades e estatística fazem parte do currículo de matemática do ensino básico e do secundário de muitos países. A razão para esta inclusão deve-se ao facto de se considerar que a estocástica é muito útil para o dia-a-dia dos cidadãos, e que o seu conhecimento desempenha um papel muito importante em muitas profissões. Godino, Batanero e Cañizares (1996) considera que para além das razões de carácter científico definidas por diversos autores para o ensino das probabilidades e estatística no ensino básico e secundário, temos ainda de considerar razões de carácter social, pois é necessário tornar os cidadãos conscientes da natureza probabilística dos jogos de azar, já que estes constituem excelentes negócios para os seus promotores, mas para os cidadãos podem não ser apenas uma actividade lúdica, mas um risco desproporcionado de perder dinheiro.

Considerando a necessidade de atender às capacidades dos alunos de entender os conceitos probabilísticos, têm sido propostas alterações à forma de abordar o tema. Por exemplo, é proposto que se passe de um ensino que assentava na utilização formal de regras e sua aplicação a situações bem definidas, enfatizando métodos de cálculo combinatório, para um ensino em que é sugerido a utilização de actividades de ensino onde o aluno primeiro faça previsões sobre as possibilidades de ter diferentes resultados em experiências aleatórias simples com recursos a materiais manipulativos, obtenha dados empíricos destas experiências e finalmente compare as probabilidades experimentadas geradas com a s previsões originalmente efectuadas (NCTM, 2007).

Investigações efectuadas por Konold (1995) (citado por Serrano, Batanero, Ortiz & Cañizares, 2001), sobre o raciocínio probabilístico, sugerem que a simples realização de previsões e a sua comparação com os resultados obtidos experimentalmente não são suficientes para que os alunos alterem as suas concepções, uma vez que os resultados raramente revelam com suficiente claridade os resultados e propriedades matemáticas que queremos mostrar aos alunos. Estes exibem, com frequência, ideias incorrectas sobre os conceitos de probabilidade e de aleatoriedade, levando Garfield (1995) a considerar que o ensino das probabilidades se deve apoiar no conhecimento prévio que os alunos têm sobre estes conceitos, uma vez que quando se ensina algo de novo, os estudantes constroem este novo conhecimento conectando a nova informação com aquela que tinham previamente. O conhecimento das concepções e de formas de raciocínio dos alunos é consequentemente um ponto-chave para assegurar o êxito das novas propostas curriculares.

Analisando os currículos do ensino básico e secundário da disciplina de Matemática, verificamos que o tema probabilidades aparece pela primeira vez no 9° ano, referindo-se no programa oficial que:

> No final do 3° ciclo uma primeira abordagem intuitiva da noção de probabilidade, a partir de jogos ou outras actividades, pretende consciencializar o aluno que existem determinadas leis que permitem estudar os acontecimentos aleatórios e que existe uma linguagem específica que facilita a comunicação deste tipo de acontecimentos. Os conhecimentos já adquiridos sobre Estatística permitem relacionar frequências relativas obtidas experimentalmente com o valor da probabilidade de um acontecimento (Ministério da Educação, 1991, p. 51).

A segunda abordagem do tema é feita no ensino secundário. Na disciplina de Matemática A (disciplina dos cursos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas), esta segunda abordagem é efectuada no 12° ano, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais – MACS (disciplina dos cursos de Línguas e Humanidades), esta segunda abordagem é efectuada no segundo dos dois anos de funcionamento da disciplina. Também nos cursos profissionais (módulo 7 – Probabilidades) se enfatiza o estudo das probabilidades, bem como o das probabilidades condicionadas. Em todos estes casos, pretende-se dotar os alunos de uma ferramenta considerada importante, mesmo para os alunos cujo objectivo é o ingresso no mundo de trabalho. Segundo Godino et al. (1996),

> a probabilidade pode ser tão aplicada à realidade como a aritmética elementar, não sendo preciso o conhecimento de teorias físicas nem de técnicas matemáticas complicadas. Pelas suas muitas aplicações, adequadamente compreendidas, a probabilidade proporciona uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Em consequência, o ensino das noções probabilísticas pode ser levado a cabo mediante uma metodologia heurística activa e através da colocação de problemas concretos e da realização de experiências reais ou simuladas. (p. 12)

Fischbein (1975) considera que os currículos são de carácter exclusivamente determinista e há necessidade de mostrar aos alunos uma imagem mais equilibrada da realidade, pois,

> no mundo contemporâneo, a educação científica não pode reduzir-se a uma interpretação unívoca e determinista de sucessos. Uma cultura científica eficiente reclama uma educação no pensamento estatístico e probabilístico. A intuição probabilística não se desenrola espontaneamente, excepto dentro de uns limites muito estreitos. A compreensão, interpretação, avaliação e predição de fenómenos probabilísticos não podem ser confinadas a intuições primárias que têm sido desprezadas, esquecidas e abandonadas num estado de desenvolvimento rudimentar sob pressão de esquemas operacionais que não se podem articular com elas. (p. 12)

Ainda segundo Godino et al., (1996) a tendência determinista do ensino não é motivada por razões científicas pois, apesar do carácter aproximado das leis do azar, a partir do momento em que se conhece o seu grau de aproximação, é possível fazer predições, como acontece com as outras leis experimentais. No actual sistema de educação tende-se a dar à criança a impressão de que para cada questão existe apenas uma só resposta certa e clara e que não há nada de intermédio entre o verdadeiro e falso, o que contraria o que se verifica na realidade já que os problemas com que se vão confrontar na realidade não se enquadram numa tal dicotomia. É pois necessário ensinar os alunos a viver com a incerteza e a saber distinguir a sua natureza. É necessário ensinar a lógica probabilística na escola, pois com esta aprendemos a controlar a incerteza. É pois importante que o ensino das probabilidades desenvolva nos alunos esta capacidade de compreender a incerteza.

Cientes desta necessidade de mudança, é de salientar que os novos currículos de todos os países desenvolvidos reflectem esta preocupação, propondo mudanças na forma como deve ser ensinado o tema das probabilidades. Nesta nova abordagem das probabilidades, no caso português, os conceitos intuitivos adquiridos no 9º ano vão ser aprofundados e pela primeira vez é definida uma axiomática das probabilidades. É também agora que pela primeira vez os alunos vão ser confrontados com o conceito de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes.

Um dos conceitos mais importantes da Teoria das Probabilidades é o de probabilidade condicionada, que está relacionado com o facto de em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento já se dispor de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite actualizar a atribuição de probabilidades a esse acontecimento.

A probabilidade condicionada é um conceito cujo estudo está previsto em todos os programas escolares da disciplina de Matemática do ensino secundário, sendo fundamental a sua compreensão para a tomada de decisões sob determinadas condições. No nosso dia-a-dia é frequente a tomada de decisões condicionadas a determinados condições, pelo que é fundamental que os alunos aprendam a trabalhar nessas condições. Díaz (2009) considera que a "probabilidade condicionada é fundamental nas aplicações estatísticas porque permite incorporar mudanças no nosso grau de crença sobre os sucessos aleatórios à medida que adquirimos novas informações" (p. 100)

A probabilidade condicionada pode definir-se com diversos graus de formalização. De uma forma intuitiva, a probabilidade condicionada $p(A|B)$ é o cálculo do valor da probabilidade do acontecimento A tendo como condicionante o facto de o acontecimento B se ter realizado. Por outro lado, se quisermos definir a probabilidade condicionada de uma forma mais formal, podemos dizer que a probabilidade condicionada se define através da expressão $p\ (A/B) = \frac{p\ (A \cap B)}{p\ (A)}$, com $p(A) > 0$.

Outro conceito em que os alunos apresentam bastantes dificuldades e concepções erróneas é o de acontecimentos independentes. De uma forma intuitiva podemos definir que dois acontecimentos são independentes quando a realização de um não é afectada pela realização do outro. Por outro lado, de uma forma mais formal, podemos dizer que dois acontecimentos são independentes se e só se $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

A importância dada à compreensão dos conceitos probabilísticos é bem notória nos Exames Nacionais e nos Testes Intermédios, da responsabilidade do Ministério da Educação, onde as questões sobre este tema são uma constante. É também comum nas questões destas provas oficiais pedir um processo de resolução dos problemas, mais baseado em justificações conceptuais e menos em procedimentais, sendo mesmo usual a inclusão de questões onde se pede a justificação de raciocínios.

No caso das questões que envolvem a probabilidade condicionada é frequentemente solicitado ao aluno que a resolva sem recorrer à respectiva fórmula. Constata-se, no entanto, que os alunos demonstram bastante dificuldade na resolução destas questões, pois para que o possam fazer, aplicando os conhecimentos conceptuais que adquiriram, têm que os ter entendido e dominar os conceitos que são necessários à resolução do problema. O que se verifica é que nem sempre estes conceitos estão apreendidos e consolidados, pois vários são os entraves a esta aquisição dos conhecimentos.

É necessário perceber as dificuldades que os alunos demonstram na resolução dos problemas, compreender os seus raciocínios, para que através de estratégias de ensino-aprendizagem adequadas se possa contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e de independência.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se uma síntese das principais investigações relacionadas com a compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Estas investigações têm sido desenvolvidas quer no campo da Psicologia quando se estudam os raciocínios e os processos de tomada de decisões em situações de incerteza, quer no campo da Educação Matemática.

Em termos de organização do capítulo, começa-se por apresentar as razões porque é importante o ensino das probabilidades e, de seguida, a importância do estudo das probabilidades condicionadas. Por fim, referem-se alguns dos principais estudos sobre os raciocínios em probabilidades condicionadas e algumas situações de aprendizagens do conceito.

2.1. Porque ensinar probabilidades

As ideias de azar estão firmemente estabelecidas na nossa cultura, manifestando-se em múltiplas situações imprevisíveis do dia-a-dia, tais como a lotaria ou a previsão do tempo. Com o desenvolvimento da civilização, o azar tem assumido um papel ainda mais importante na sociedade, que se reflecte no aumento da importância que as probabilidades têm nos currículos escolares em quase todo o mundo.

Um dos principais objectivos do ensino da matemática é, segundo Kapadia & Borovcnik (1991), que esta é um poderoso meio de comunicação que oferece estruturas de pensamento. O ensino das probabilidades tem ainda a mais valia de ser um meio importante de aplicação das ideias matemáticas em situações realistas. No entanto, a probabilidade é um assunto difícil de ensinar e de aprender pois os paradoxos e as ideias contra-intuitivas ocorrem em aplicações muitos simples. As pessoas parecem não terem as intuições em probabilidades da mesma forma com as têm em geometria por exemplo, o que vem justificar a dificuldade no seu estudo.

A probabilidade pode ser pensada como uma aproximação matemática de quantificar o azar, tal como as réguas quantificam as distâncias. Enquanto na geometria, apesar de haver ideias paradoxais, estas só aparecem a um nível de conhecimentos mais profundo e avançado, nas probabilidades as ideias paradoxais ou contra-intuitivas aparecem em aplicações muito simples, e resultam do tanto do pensamento dos sujeitos como de uma definição multifacetada do próprio conceito. Esta conclusão é corroborada pelas vastas investigações psicológicas sobre os equívocos das pessoas, bem como pelas dificuldades dos alunos ao aplicar os conceitos das probabilidades (e.g., Falk, 1989; Fischbein & Schnarch, 1997; Kahneman & Tversky, 1982). As pessoas parecem não ter intuições correctas em probabilidade da mesma forma que têm em geometria.

Tendo em conta a importância do ensino do tema, actualmente as probabilidades e a estatística fazem parte dos currículos matemáticos desde a escola básica à universidade em todos os cursos e em muitos países. As razões da sua inclusão têm sido largamente divulgadas e incluem a utilidade dos conceitos da estatística e das probabilidades para a vida diária e o papel importante que desempenha nas outras disciplinas, bem como as suas diversas aplicações. Albert (2006), considera que os conceitos básicos de probabilidade devem ser ensinados porque no nosso dia-a-dia a incerteza é omnipresente, e a probabilidade é usada como forma de a medir.

Enquanto disciplina por si só, as Probabilidades estão relacionadas com outras áreas da matemática, sobretudo com os números e a geometria. Os conceitos de probabilidade funcionam como base para a recolha, descrição e interpretação de dados (NCTM, 2007, p. 55).

Ao longo da vida escolar dos alunos é fundamental que eles se vão familiarizando com noções básicas de probabilidades tais como: "é provável que…", "é pouco provável que …", "é certo que…", pois assim vão desenvolvendo as noções de acaso e de aleatoriedade através de experiências com objectos concretos. Os alunos do 2.º e do 3.º ciclo de ensino básico devem aprender e utilizar uma terminologia apropriada e deverão ser capazes de calcular probabilidades de ocorrências simples e compostas. Os professores deverão abordar este tema através de actividades informais que permitam fazer a ligação entre os conceitos novos que se pretende que os alunos adquiram e os que já trazem de outros temas. Por exemplo, ao "lançar dois dados e adicionar os números obtidos" os alunos poderão começar a entender os resultados que obtêm e associar esses resultados à classificação dos acontecimentos (por exemplo, "é impossível obter zero", "é certo obter um número inferior a 13", etc.).

Já no ensino secundário, uma vez apreendidos e interiorizados os conceitos básicos, os alunos deverão calcular probabilidades de ocorrências compostas e compreender os factores condicionantes e os acontecimentos independentes (NCTM, 2007). Dada a importância do tema, o NCTM (2007) indica os objectivos para o ensino dos conceitos de probabilidades de acordo com a idade dos alunos. Assim:

- Idade dos 3-7 anos: discutir acontecimentos relacionados com as experiências dos alunos e descrevê-los como prováveis ou improváveis (p. 126);
- Idade dos 7-10 anos: descrever os acontecimentos como prováveis ou improváveis e discutir o seu grau de incerteza, usando termos como certo, igualmente provável ou impossível; prever a probabilidade de resultados de experiências simples e testar as suas previsões; perceber que a medida da probabilidade de um acontecimento pode ser representado por um número entre zero e um (p. 204);
- Idade dos 10 -14 anos: compreender e usar a terminologia apropriada na descrição de conceitos relativos a acontecimentos complementares e mutuamente exclusivos; usar a proporcionalidade e uma compreensão básica de probabilidade para formular e testar conjecturas acerca de resultados de experiências e simulações; calcular a probabilidade de acontecimentos compostos elementares, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árvore e modelos de área (p. 292);
- Idade dos 14-18 anos: compreender os conceitos de espaço amostral e distribuição de probabilidades; usar simulações para criar distribuições de probabilidades empíricas; calcular e interpretar o valor esperado de variáveis aleatórias; compreender os conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes; compreender como calcular a probabilidade de um acontecimento composto (p. 382).

Os alunos desta última fase etária devem entender a diferença entre a probabilidade experimental e a probabilidade teórica e conceitos de probabilidade, tais como a independência e a dependência de acontecimentos e a sua relação com acontecimentos compostos e com a probabilidade condicional devem ser ensinados intuitivamente. Definições formais e propriedades devem ser desenvolvidas apenas depois de uma firme base conceptual ser estabelecida para que os alunos não apliquem as fórmulas indiscriminadamente.

A aprendizagem dos alunos de um conceito deve ser construído tendo por base os seus conhecimentos e mediante um processo gradual a partir dos erros e esforços dos alunos. Se o professor de matemática que vai ensinar as probabilidades aos seus alunos não estiverem conscientes desta problemática, dificilmente poderá entender algumas dificuldades dos seus alunos. Batanero (2004) considera que apesar das ideias construtivistas considerarem que o aluno deve ser o construtor do seu próprio conhecimento, o professor deve guiar o aluno ao longo de todo o processo de construção do conhecimento e ajudá-lo a superar os obstáculos que lhes possam surgir e proporcionar as ferramentas necessárias para crescer na sua compreensão das probabilidades.

Fischbein e Gazit (1984) definem "intuição" como sendo avaliações ou previsões sintéticas ou globais, não justificáveis explicitamente. Sendo uma cognição global ela é sentida pelo sujeito como sendo auto-evidente, auto-consistente, portanto dificilmente questionável. Uma intuição é de alguma forma uma crença cognitiva. Estes autores referem ainda que por vezes esta crença coincide com o que é cientificamente aceite, mas outras vezes é com ele contraditório.

Estas atitudes intuitivas não devem ser ignoradas no processo de ensino-aprendizagem, pois sendo correctas ajudam o aluno a adquirir e a integrar o correspondente conhecimento científico e não sendo objectivamente aceitáveis devem ser eliminadas e desenvolvidas representações intuitivas adequadas. Se o programa de ensino não atender à existência de possíveis pré-conceitos intuitivos, eles permanecerão nos alunos apesar das estruturas conceituais ensinadas.

Batanero y Díaz (2007) consideram que

> Para além da sua compreensão intuitiva, a probabilidade pode ser considerada como uma razão de possibilidades a favor e contra, a evidência proporcionada pelos dados, o grau de crença lógica ou pessoal, propensão e modelo matemático que nos ajuda a compreender a realidade. A análise dos diversos significados históricos de probabilidade: intuitivo, clássico, frequencista, subjectiva, lógico, propensão e axiomático (Batanero, 2005; Batanero, Henry e Parzysz, 2005; Batanero & Díaz in, press) sugere que o seu ensino não se pode limitar a uma destas diferentes perspectivas, uma vez que elas estão ligadas dialecticamente. (p.2)

Efectuando uma análise ao currículo da disciplina de matemática do ensino secundário, verificamos que o seu ensino tem dado primazia a um ou a outro significado, conforme as tendências pedagógicas do momento. Segundo Batanero e Díaz (2007) até 1970 o ensino das probabilidades foi baseado no cálculo combinatório conferindo-lhe assim uma visão clássica. Muitos professores viam a probabilidade como uma parte secundária das matemáticas, que só interessava para os jogos de azar, onde a equiprobabilidade se encontra efectivamente, deixando ocultas as suas aplicações às diferentes ciências. Por outro lado, como o cálculo combinatório é complexo, os alunos consideravam este conceito muito difícil.

Na década de 70, no auge da teoria de conjuntos, aumentou o interesse dos matemáticos pelas probabilidades por se tratar de uma parte privilegiada para mostrar a aplicabilidade da teoria de conjuntos, tanto pela sua simplicidade como pela sua ligação à realidade. Nos últimos vinte anos tem-se verificado uma tendência para renovar o ensino das probabilidades transformando-o num ensino mais experimental, de forma a proporcionar aos alunos uma experiência estocástica desde a infância (NCTM, 2000).

Para Batanero (2005) estas mudanças levam-nos a reflectir sobre a natureza da probabilidade e as componentes da sua compreensão. Os conhecimentos matemáticos não são estáticos, mas são fruto de uma construção constante, soluções admitidas como certas em determinada ocasião, são posteriormente rebatidas ou melhoradas, e é esta constante construção que contribui para que a matemática avance. Também a aprendizagem dos alunos é feita por um processo similar, devendo ser eles a construir o seu próprio conhecimento, mediante um processo gradual, a partir dos seus erros e do seu próprio esforço. Se o professor de matemática, que vai ensinar as probabilidades, não estiver consciente deste processo, dificilmente poderá entender as dificuldades que os alunos irão sentir ao lidarem com situações problemáticas que historicamente surgiram nas probabilidades.

Considerando que na aprendizagem de um conceito podem existir diferentes significados, Batanero (2005) define para a aprendizagem do conceito de probabilidade cinco significados diferentes cujos elementos que os caracterizam se resumem no quadro 1.

Quadro 1 – Elementos que caracterizam os diferentes significados da probabilidade

Significado de probabilidade	**Campo de problemas**	**Algoritmos e procedimentos**	**Elementos linguísticos**	**Definições e propriedades**	**Alguns conceitos relacionados**
Intuitivo	• Sorteios • Adivinhação	• Manipulação de geradores de acaso: dados, cartas, etc.	• Linguagem corrente	• Opinião imprevisível, crença	• Sorte • Destino
Clássica	• Cálculo de esperanças ou riscos em jogos de azar	• Combinatória • Proporções • Análise *a priori* da estrutura da experiência	• Triângulo de Pascal • Lista de sucessos • Fórmulas da combinatória	• Quociente de casos favoráveis e possíveis • Equiprobabilidade de acontecimentos simples	• Esperança • Equitatividade • Independência
Frequencista	• Estimação de parâmetros em populações	• Registo de dados estatísticos *a posteriori* • Ajustes de curvas matemáticas • Análises matemáticas • Simulação	• Tabelas e gráficos estatísticos • Curvas de densidade • Tabelas de números aleatórios • Tabelas de distribuições	• Limite das frequências relativas • Carácter objectivo baseado na evidência empírica	• Frequência relativa • Universo • Variável aleatória • Distribuição de probabilidades
Subjectiva	• Melhoria do conhecimento sobre acontecimentos	• Teorema de Bayes • Atribuição subjectiva de	• Expressão da probabilidade condicionada	• Carácter subjectivo • Passível de revisão com a	• Probabilidade condicionada • Distribuições *a priori* e *a*

	incertos, incluindo os sem repetição	probabilidades		experiência	*posteriori*
Axiomática	• Quantificar a incerteza de resultados em experiências aleatórias abstractas	• Teoria de conjuntos • Álgebra de conjuntos • Teoria da medida	• Símbolos dos conjuntos	• Função mensurável	• Espaço amostral • Espaço de probabilidade • Conjuntos de Borel

Todos estes significados partilham de um raciocínio do tipo dedutivo, de análise e síntese, de uso de exemplos e contra-exemplos e, na opinião de Batanero (2005), os argumentos do tipo empírico estão mais ligados à probabilidade frequencista e os indutivos à probabilidade subjectiva. A axiomática, cuja índole é estrutural, corresponde a uma problemática de organização e estruturação dos restantes significados parciais para a probabilidade.

Henry (1977) citado em Batanero (2005), considera que a axiomatização levou a uma abstracção excessiva para os alunos do secundário ao centrar-se mais na formalização do conceito e menos na sua aplicabilidade a temas de interesse para os alunos. No entanto, para Batanero (2005), deve ter-se em conta os elementos deste tipo de significado do conceito para o ensino das probabilidades ou de qualquer outro conceito matemático, pois as investigações demonstram que os alunos têm muitas dificuldades em cada uma das componentes.

É também importante ter em conta os diferentes significados da probabilidade e que a sua introdução deve ser feita progressivamente, começando desde as ideias intuitivas que os alunos têm sobre o azar e a probabilidade, uma vez que a compreensão de um conceito é um processo contínuo e crescente no qual o aluno constrói e relaciona diferentes elementos do significado que são inerentes ao conceito. É necessário existir um "trânsito flexível" entre os diferentes significados parciais que vão sendo introduzidos ao longo do estudo prolongado do conceito. Portanto, é importante efectuar uma boa planificação para que todo o processo de ensino-aprendizagem seja efectuado ao longo dos diferentes níveis (Batanero, 2005).

As noções de probabilidade propostas nas escolas baseiam-se, segundo Albert (2006), implicitamente em três interpretações:

(i) Interpretação teórica baseada em fórmulas, e que assenta na definição clássica de probabilidade e onde as probabilidades são atribuídas *a priori* e se assume que os acontecimentos elementares são equiprováveis.

(ii) Interpretação de carácter experimental, baseada da definição frequencista de probabilidade e onde a probabilidade de um acontecimento está associado ao valor da frequência relativa desse acontecimento, assumindo-se que nas mesmas condições de aleatoriedade esse valor pode ser associado a uma probabilidade.

(iii) Interpretação subjectiva que reflecte os pontos de vista pessoais acerca de um acontecimento.

Borovcnik, Benz e Kapadia (1991) acrescentam às interpretações propostas por Albert mais uma, a estrutural, propondo assim quatro conceitos de probabilidade a abordar nas escolas e que constam do quadro 2.

Quadro 2 – Os quatro conceitos de probabilidade

Conceito	Descrição
Clássico	Atribuem-se probabilidades a acontecimentos com base na definição clássica de probabilidade, devida a Laplace. Assume-se a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares. Uma probabilidade *a priori*, permitindo calcular a probabilidade de um acontecimento antes da sua realização. No caso das aplicações, é-se confrontado com o problema de decidir quais são os acontecimentos elementares equiprováveis. Um maior problema filosófico é a inexistência de um critério seguro para decidir sobre a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares.
Frequencista ou empírico	A probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada desse acontecimento em experiências repetidas. É um valor determinado *a posteriori*, em que a aproximação experimental é baseada na informação após as actuais tentativas serem efectuadas. A medida da incerteza é atribuída a um acontecimento individual pela sua incorporação no colectivo – uma classe infinita de acontecimentos "similares" são assumidas por ter certas propriedades aleatórias. Então, a probabilidade é o limite para o qual a frequência relativa tende. Esta definição levanta o problema de definir o número de experiências necessárias, bem como o que se entende por "similar" e "aleatório".
Subjectivista	As probabilidades são avaliações de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito. As pessoas têm as suas próprias probabilidades que derivam de um padrão inferencial implícito entre decisões. Para os subjectivistas existem duas categorias de informação, intituladas de informação prioritária, uma existente na mente do sujeito que é independente de quaisquer dados empíricos e outra que deriva dos dados empíricos. Um problema inerente ao conceito subjectivo é a sua intencional ubiquidade; toda a incerteza deve ser especificada por probabilidades. Muitos esforços dos subjectivistas vão no sentido de desenvolver estratégias para melhorar o cálculo das probabilidades *a priori*.
Estrutural	A probabilidade formal é definida implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles

	axiomas. Probabilidades são deduzidas de outras probabilidades de acordo com os teoremas matemáticos, sem justificação para os seus valores numéricos em nenhuma das aplicações. Esta abordagem estrutural não esclarece a natureza da probabilidade, embora os teoremas derivados sejam um indicador de possíveis interpretações. A abordagem estrutural, contudo, pode servir como base teórica para as duas principais concepções de probabilidade. A postura objectivista engloba as visões clássicas e frequencista. De acordo com esta visão, a probabilidade é uma espécie de disposição de um certo sistema físico que é indirectamente relacionado com a frequência empírica. Esta relação é confirmada por teoremas como a "Lei dos grandes números". A visão subjectiva considera a probabilidade como um degrau de confiança em acontecimentos incertos. Axiomas num sistema racional, como coerência e consistência, fornecem regras para as probabilidades; os axiomas de Kolmogorov permitem demonstrar os teoremas matemáticos que devem ser observados se queremos tratar racionalmente com probabilidades.

Hawkins e Kapakia (1984) efectuaram estudos acerca das concepções em probabilidade das crianças. Apesar da interpretação clássica ser aplicada a simples jogos de azar, estes investigadores consideram que esta visão constrói nos alunos uma base sólida de conhecimentos para estudos posteriores em probabilidades em que os acontecimentos não são equiprováveis. Um ensino baseado na visão frequencista de probabilidade é útil em situações onde os alunos podem efectuar experiências aleatórias e estimar probabilidades através de cálculo das frequências relativas, mas há dificuldades conceptuais em distinguir entre frequências relativas observadas e a actual probabilidade obtida numa sequência infinita de experiências. Estes autores consideram ainda que a abordagem das noções de probabilidades deve ser efectuada através da visão subjectiva do conceito pois é em maior ou menos extensão uma expressão da opinião pessoal ou percepção e é, o embrião para a probabilidade formal onde as leis matemáticas são usadas no cálculo das probabilidades.

2.2. Raciocínios dos alunos em Probabilidades

Enquanto antigamente se fazia o estudo das probabilidades apenas no ensino secundário, e sempre enfatizando os métodos do cálculo combinatório, os currículos actuais propõem que se dê início ao estudo do tema ainda no ensino básico e que posteriormente seja aprofundado no ensino secundário.

A importância dada a esta temática é também reforçada pelo facto de ser atribuído o peso de 25% a 35% ao tema de probabilidades nos Exames Nacionais do 12º ano. Ora, esta valorização do tema, releva a necessidade de compreender a forma como os alunos estabelecem os raciocínios necessários à resolução das tarefas.

Konold (1995) citado por Serrano et al (2001), nas investigações que efectuou acerca do raciocínio em probabilidades, sugere que a simples realização de predições e a sua comparação com os dados obtidos experimentalmente não é suficiente para os alunos mudarem as suas concepções subjectivas, uma vez que os dados raramente revelam com claridade todos os resultados e propriedades matemáticas que queremos mostrar aos alunos, além de que a atenção dos alunos é limitada e a variabilidade dos dados normalmente é ignorada.

Como se tem verificado, os alunos têm muitas vezes ideias incorrectas sobre os conceitos de aleatoriedade e probabilidade, Garfield (1995), considera que o ensino das probabilidades deve apoiar-se nos conhecimentos prévios que os alunos têm pois quando se ensina algo de novo, este novo conhecimento é mais facilmente assumido se puder ser conectado com conhecimentos anteriores já existentes. O conhecimento das concepções e formas de raciocínio dos alunos é portanto um ponto-chave para assegurar o êxito das novas aprendizagens.

Surge aqui a questão da evolução do desenvolvimento do raciocínio probabilístico do aluno, que permite ao professor compreender as capacidades de raciocínio do aluno e assim poder contribuir para a construção de novos conhecimentos.

2.2.1. A perspectiva de Piaget e Inhelder

Piaget e Inhelder (s/d) realizaram estudos para analisar detalhadamente as etapas na aquisição das ideias de aleatoriedade e probabilidade, o raciocínio combinatório, a distribuição e a convergência, assim como da quantificação de probabilidades em crianças e adolescentes. Com estes estudos, os autores concluíram a existência de três estádios de desenvolvimento sequenciais: pré-operacional, operações concretas e operações formais, como se mostra no quadro 3.

Quadro 3 – Estádios dos alunos na compreensão do conceito de acaso

Idade / Estádios	Capacidades dos alunos
4– 7 anos (Pré-operacional)	As operações propriamente ditas estão ausentes; os raciocínios em jogo permanecem pré-lógicos e são regulados apenas por sistemas de regulação intuitivas, sem encaixes hierárquicos, sem conservação das totalidades e sem rigor das inferências possíveis,

	mas com uma articulação progressiva das relações intuitivas, levando pouco a pouco ao nível operatório. Neste estádio os alunos não distinguem o possível do necessário, movendo-se portanto numa esfera de acção tão afastada do acaso como da própria operação. O seu pensamento oscila entre o previsível e o imprevisto, mas nada é para ela nem seguramente previsível, portanto dedutível segundo um elo de necessidade, nem seguramente imprevisível, portanto fortuito. Não se deve portanto considerar como julgamentos de probabilidades as suas antecipações atacadas por um grau maior ou menor de certeza subjectiva. Podemos então concluir que as crianças neste estádio rejeitam a ideia de acaso ou concebem-na de uma forma determinista, têm dificuldade em diferenciar a certeza da incerteza, carecem de estratégias combinatórias e ao compararem probabilidades só tomam em atenção os casos favoráveis.
7– 11 anos (Operações concretas)	Este período caracteriza-se pela construção dos agrupamentos operatórios de ordem lógica e grupos numéricos, porém apenas num plano essencialmente concreto, ou seja, relativo a objectos manipuláveis representáveis no detalhe de suas relações reais. Com o aparecimento das operações lógico-aritméticas começa um segundo período que marca o primeiro desenvolvimento da ideia do acaso. Por um lado, a descoberta da necessidade dedutiva ou operatória permite ao sujeito conceber, por antítese, o carácter não dedutivo das transformações fortuitas isoladas e distinguir entre o necessário e o simplesmente possível. A descoberta da existência do acaso, como um facto, decorre por contraste da construção das necessidades operatórias, e o início da estruturação das relações de probabilidades deve-se à possibilidade de conceber os conjuntos de elementos misturados como totalidades formadas de partes quantificáveis. Neste estádio, as crianças adquirem progressivamente uma compreensão de acaso, mas ainda confiam demasiado na possibilidade de o controlar. Começam a ser capazes de enumerar situações combinatórias simples, embora a estratégia não seja sempre completa ou consistente. As estratégias de comparação de probabilidades ampliam-se, usando tanto os casos favoráveis como os desfavoráveis, sem chegar a um raciocínio proporcional completo. Não reconhecem a lei dos grandes números.
Mais de 12 anos (Operações Formais)	Este período é caracterizado pelo pensamento formal, quer dizer, pela possibilidade de ligar um ao outro um ou vários sistemas de operações concretas ao mesmo tempo e traduzi-los em termos de implicações hipotético – dedutivas, isto é, de lógica de proposições. Só neste estádio é que o julgamento de probabilidades se organiza, por uma espécie de choque em volta da operação sobre o acaso. Progressivamente concebem o acaso como ausência de padrões e imprevisibilidade. Adquirem a

	intuição de convergência, usando proporções nas comparações de probabilidades e alcançam a capacidade de utilizar a combinatória para enumerar.

Resumindo, no estudo efectuado sobre a aquisição da ideia do acaso na criança Piaget e Inhelder consideram que se pode caracterizar o terceiro estádio em relação aos outros dois:

> durante o primeiro período, não há diferenciação entre o dedutível e o não dedutível, ficando a antecipação intuitiva a meio caminho ente a operação e o próprio acaso; no segundo período, existe a diferenciação e, portanto existe inicialmente uma antítese entre o acaso e as operações, determinando este o domínio do dedutível, e aquele definindo o domínio do dedutível e do irreversível, ou seja, do imprevisível; no terceiro período, há a síntese entre o acaso e as operações, permitindo estas estruturar o campo das dispersões fortuitas em um sistema de probabilidades, por uma espécie de assimilação analógica do fortuito ao operatório. Para este resultado, concorrem dois processos correlativos. Por um lado, a construção dos sistemas combinatórios, por outro lado o pensamento formal que permite a construção de tais sistemas combinatórios, leva igualmente à descoberta das proporções: a lei dos grandes números, que aplica as relações de proporcionalidade a essas mesmas operações combinatórias, leva então o sujeito a conceber a legitimidade de uma composição probabilista das modificações fortuitas, no sentido de uma dispersão proporcionalmente sempre mais regular, e por conseguinte à previsão racional. (p. 296)

Carvalho e Fernandes (2005), analisando os estudos desenvolvidos por Piaget e Inhelder (1951), consideram que para estes últimos

> o desenvolvimento da noção da probabilidade resulta de uma amálgama entre factos e sequências causa-efeito, fruto das próprias acções do sujeito, bem como da noção de acaso e de estimações espontâneas que vai formando com base no carácter mais ou menos provável dos acontecimentos esperados ou receados que vai vivenciando através das suas experiências quotidianas.
> O desenvolvimento cognitivo consiste numa sequência de transformações onde esquemas sensório-motores elementares são progressivamente integrados em estruturas complexas. O conceito de probabilidade, tal como acontece com outros, segue uma ordem de diferentes níveis até à sua aquisição. (p. 3)

Para estes autores, a noção de acaso e as suas implicações no desenvolvimento do conceito de probabilidade são a continuação da evolução das operações lógicas e consideram que apenas quando a criança compreende as relações de causa-efeito dos fenómenos físicos é que a criança consegue compreender os fenómenos aleatórios.

Fernandes (1990) considera que com a compreensão da lei dos grandes números atinge-se o conceito de probabilidade enquanto limite da frequência relativa e sintetiza os estádios da aquisição do conceito de probabilidade considerando que "este decorre da racionalização dos processos estocásticos através das operações (p. 31). Durante o primeiro estádio a ideia de acaso ou de probabilidade não é observada, pois a as operações formais, enquanto sistema de referência não estão formadas. No segundo estádio, a ideia do acaso impõe-se por oposição às operações concretas e a ideia de probabilidade racionaliza-se para o caso dos "pequenos números" servindo-se, como apoio, da disjunção concreta. No terceiro estádio, temos a racionalização da ideia do acaso e do conceito de probabilidade para o caso dos grandes números, a partir das operações combinatórias.

2.2.2. A perspectiva de Fischbein e outros investigadores

Outras investigações têm sido desenvolvidas no sentido de estudar o desenvolvimento do raciocínio das crianças na aquisição dos conceitos de probabilidades. Feller (citado por Fischbein & Gazit, 1984) enfatiza a necessidade de desenvolver intuições probabilísticas adequadas como uma componente base para o ensino das probabilidades. Fischbein (1975) explorou os fundamentos do pensamento intuitivo e como este se relaciona com o pensamento probabilístico.

Carvalho e Fernandes (2005) consideram que os estudos de Fischbein constituíram uma das primeiras pontes de ligação entre a psicologia e a educação matemática e debatem algumas destas conclusões, preocupando-se não só com a formação dos conceitos formais mas também com a aparição de intuições parciais sobre os conceitos estocásticos e a forma como estes se reflectem no ensino. Segundo Piaget e Inhelder (1951) as crianças no período intuitivo (6-7 anos) não são capazes de distinguir claramente entre sorte e fenómenos necessários e esta distinção aparece apenas no período das operações concretas juntamente com formas elementares de estimativas de probabilidades.

O conceito de probabilidade, como um construto formal, desenvolve-se apenas durante o estádio operacional e representa a síntese entre o necessário e o possível. Esta interpretação é contestada por vários investigadores que consideram que as estimativas probabilísticas elementares podem ser encontradas até nas crianças do pré-escolar. Para Fischbein (1975), a compreensão probabilística assenta numa base intuitiva particular e considera que as intuições correctas em probabilidade podem ser identificadas nas crianças da pré-escola. Contudo, as influências sociais e os currículos escolares actuais, que enfatizam uma visão determinista do mundo explicam frequentemente os erros nos julgamentos probabilísticos espontâneos das pessoas e as avaliações incorrectas em situações de incerteza, muitas vezes expressas como opiniões preconcebidas e superstições.

Nas suas investigações, Fischbein e Gazit (1984) consideram necessário o ensino da estocástica, pois sem instrução é difícil desenvolver um raciocínio estocástico adequado, mesmo quando a criança atinge o estádio das operações formais.

Para Fischbein (1975) as crianças têm ideias concretas acerca do conceito de probabilidade. Compete à instrução identificar os conceitos intuitivos e desenvolvê-los por forma a promover nas crianças a capacidade de efectuarem raciocínios probabilísticos. Para este autor, em todo o processo de desenvolvimento deste e de outros conceitos, as intuições das crianças desempenham um papel importante e estas não se desenvolvem espontaneamente, excepto em limites apertados – "Uma cultura científica eficiente requer Educação do pensamento em estatística e probabilidades" (Fischbein, 1975, p. 131).

Para este autor, intuições são parte integrante do comportamento inteligente. São aquisições cognitivas que intervêm na prática ou na acção mental, pela virtude das suas características globais: urgência, globalidade, capacidade extrapolativa, estruturalidade e auto-evidência. Considera ainda que:

> as intuições são componentes cognitivas do comportamento da inteligência que são adaptadas, nas suas funções e propriedades, para assegurar a eficiência do comportamento. São esquemas estruturais estáveis que seleccionam, assimilam e armazenam tudo na experiência do indivíduo e que foi encontrado para ganhar rapidez, adaptabilidade e eficiência na acção. A sua característica essencial no comportamento da inteligência é servir como base para as extrapolações. (Fischbein, 1975, p. 125).

Extrapolar é um salto para o desconhecido, é uma conclusão para lá da dedução rigorosa através das premissas. O "feeling" de confiança e convicção que acompanha uma intuição é projectado para compensar (ou talvez mascarar) a lacuna que separa a informação estritamente disponível da interpretação final. Intuições, portanto, crescem como uma função de tudo o que aumenta a capacidade de extrapolar, entre outras coisas, em função do mecanismo de inferência lógica, que podem ser condensadas em hábitos mentais.

As intuições podem ser de dois tipos: as primárias e as secundárias. As primeiras são aquisições cognitivas que são derivadas da experiência individual sem necessidade de uma instrução sistematizada; as segundas são aquisições que têm todas as características das intuições primárias mas são formadas pela educação científica, a maior parte ocorrida na escola. Fischbein (1975) considera que as intuições ainda se podem classificar em afirmativas e antecipatórias. As afirmativas incorporam os conhecimentos do mundo externo que são aceites como evidentes, e as antecipatórias são construtos mentais que antecipam a solução de um problema antes dos passos detalhados da solução terem sido encontrados.

No conceito de probabilidade as intuições secundárias desenvolvem-se a partir dos conceitos de frequência relativa e acaso, mas para possa existir este desenvolvimento é necessária uma instrução onde devem ser trabalhadas as noções básicas da teoria e das heurísticas das probabilidades, pois, segundo Fischbein (1975), sem esta instrução o sujeito não consegue desenvolver um conceito operativo de probabilidade.

Fischbein (1975) refere as intuições fundamentais relativas ao desenvolvimento das probabilidades nas crianças, segundo os diferentes estádios de desenvolvimento cognitivo:

Crianças do pré-escolar

- Intuições de sorte – Distingue o aleatório no sentido de imprevisível, do dedutivo, mas a sua interpretação é distorcida por características gerais da sua inteligência (subjectivismo, indução passiva, a crença que o aleatório pode ser controlado, a distinção entre o aleatório e o necessário é instável na ausência de um sistema dedutivo operacional).
- Intuição de frequência relativa – As crianças nesta fase adaptam as suas predições à probabilidade dos acontecimentos, no entanto, segundo alguns investigadores, as crianças nesta fase não atendem às frequências. Para Fischbein (1975) esta adaptação é uma expressão típica de uma intuição primária.
- Estimativa de hipóteses – Investigadores colocaram a hipótese que as crianças do pré-escolar eram incapazes de estimar correctamente probabilidades em acontecimentos aleatórios. O principal argumento foi que as crianças desta idade não possuem os recursos necessários: (a) a habilidade de distinguir entre aleatório e dedutível, na base de procedimentos operacionais; (b) o conceito de proporção, ou em termos mais genéricos a comparação de rácios; (c) os processos combinatórios pelos quais é possível criar um inventário dos resultados possíveis em uma dada situação. Nenhum destes recursos específicos aparece até ao nível das operações formais. Segundo estes autores, mesmo que as crianças do nível pré-escolar parecerem estimar hipóteses correctamente em determinada situação, isto não indica o verdadeiro julgamento em probabilidade, no sentido da estimação da intuição probabilística. No ponto de vista de

Fischbein, este facto não prova que as crianças da pré-escolar não são capazes de efectuar julgamentos probabilísticos. Os julgamentos em probabilidades das crianças do pré-escolar são precários porque ainda não têm um adequado quadro conceptual, as suas respostas apenas expressam estimativas pré-operacionais e intuitivas.

- Efeito da instrução – Estudos efectuados com crianças desta idade levaram a concluir que é possível que as crianças não possam assimilar esquemas envolvendo a dupla comparação.
- Operações combinatórias – Piaget e Inhelder mostraram que as crianças do pré-escolar podem fazer algumas combinações, permutações e arranjos de uma forma empírica, sem tentarem encontrar um método de criação de inventários exaustivos.

Crianças do período das operações concretas

- A intuição de sorte – Através da aquisição do esquema espaço-temporal e dos esquemas operacionais lógico-matemáticos as crianças tornam-se capazes de distinguir entre o aleatório e o dedutível, mesmo no nível conceptual. Claro que o processo ainda não está completo neste período, uma vez que o pensamento ainda está muito ligado ao nível concreto. No entanto, a representação de sorte, que não é mais que uma intuição primária na criança do nível pré-escolar, torna-se um conceito estrutural, organizado e distinto após a idade dos 7 anos. A sorte, no sentido de não determinado, é perfeitamente percebida, em oposição ao dedutível de Piaget. As crianças começam a perceber a interacção de cadeias causais que conduzem a acontecimentos imprevisíveis e à irreversibilidade de fenómenos aleatórios.
- A intuição de frequência relativa – A maioria dos investigadores descobriu que a adequação da probabilidade aumenta com a idade. Depois dos 7-8 anos, a adequação é mais rápida nas sessões experimentais do que na idade do pré-escolar, e isto indica, sem dúvida, um desenvolvimento da intuição primária da frequência relativa. Este desenvolvimento pode ser explicado de diferentes maneiras. Se a intuição for vista como o resultado cognitivo da experiência acumulada, pode ser suposto que a intuição de frequência relativa se desenvolve naturalmente como um resultado da experiência da criança com situações envolvendo a probabilidade de acontecimentos, nos quais as respostas devem expressar uma estimativa correcta da frequência objectiva do fenómeno. Por outro lado, esquemas de desenvolvimento da inteligência – que por

implicam um melhor domínio das operações - podem assegurar uma mais correcta interpretação dos dados relativos à frequência relativa em acontecimentos experimentais. Nesta idade, a criança já não é tão dominado pelos dados perceptivos como a criança pré-escolar e as representações são mais consistentes e eficientes do que nas crianças do estádio anterior A intuição de frequência pressupõe uma capacidade de entender a existência de "partes" de acontecimentos, é executado de tal forma que as estimativas de proporções globais podem ser feitas. Tudo indica que as intuições de frequência relativa, enquanto intuições primárias e pré-operacionais (semelhante a uma resposta condicional clássica), beneficiam das aquisições gerais da inteligência durante o estádio operacional. Esta interacção entre o intuitivo e conceptual, parece ter implicações importantes para a teoria da intuição.

- A estimativa de hipóteses e do conceito de probabilidade – Se não receberem instrução apropriada, as crianças de 9-10 anos podem apenas resolver problemas envolvendo comparações de probabilidades em situações onde quer o número de casos favoráveis ou o número de casos desfavoráveis são iguais.
- Efeitos da instrução – Com a instrução, as respostas das crianças de 9-10 anos podem ser significativamente melhoradas em problemas que não podem ser reduzidos a comparações binárias. Esta descoberta é importante, uma vez que lança a dúvida sobre a alegação de Piaget e Inhelder que estabelecem a proporcionalidade como uma característica das operações formais. Fischbein demonstrou que, através do uso de procedimentos figurativos, esquemas que foram considerados por Piaget e Inhelder serem acessíveis apenas no nível das operações formais, podem ser construídos no nível das operações concretas. Fischbein provou que o não domínio da proporcionalidade não é um obstáculo para aprender o conceito de probabilidade. Mesmo antes dos 10 anos é possível a criança determinar estes valores apenas com instrução elementar.
- Procedimentos combinatórios – Durante o período das operações concretas, as crianças procuram formas de criação de inventários de todas as permutações, arranjos e combinações possíveis com um determinado número de elementos, e chegam a procedimentos rudimentares por tentativa e erro. As investigações levaram a concluir que as crianças de 10-11 anos podem, com a ajuda da instrução, assimilar processos de enumeração usando o diagrama de árvore. Trata-se de uma aquisição estrutural,

pois é capaz de transferência - tanto de transferência perto (por generalização iterativo) como de transferência mais distante (por generalização construtiva).

- Sorte e determinismo – Fischbein considera que apesar do que foi dito anteriormente parecer contraditório, tal pode ser explicado pois a intuição de sorte, de frequência relativa e de probabilidade desenvolvem-se com a idade como uma função do desenvolvimento intelectual e da experiência do dia-a-dia. Ao mesmo tempo, contudo, e particularmente sob influência da instrução recebida na escola, a criança desenvolve uma tendência determinista para interpretações unívocas de fenómenos. Na teoria de Piaget e Inhelder, o necessário e o possível tornam-se distintos no nível das operações concretas. Depois da fase na qual o aleatório e o determinado são vistos como opostos, a criança chega, durante o estádio das operações formais, à síntese destes dois aspectos complementares numa só interpretação – a interpretação probabilística. Fischbein considera que estes dois modos de interpretação fundem-se de uma maneira muito instável, uma vez que o modo actual da educação é tal que apenas um deles é sistematicamente desenvolvido – o determinado. Os dois esquemas continuam a coexistir na cabeça da criança e mais tarde, em adulto, aparece sem nenhuma fusão ou, em certos casos, parcialmente fundidos. Parece existir uma vacilação entre estas duas interpretações, juntamente com um profundo sentimento de incapacidade de compreender os fenómenos em questão. A supremacia de esquemas de pensamento determinista é manifestada de uma maneira hiper-racionalizada. A intuição de sorte e a probabilidade são influenciadas e ultimamente deformadas pela excessiva tendência para a predição unívoca.

Crianças do período das operações formais

Depois dos 11-12 anos, as crianças tornam-se capazes de raciocinar de uma maneira hipotético-dedutiva em relação ao possível, e não só sobre realidades. Este raciocínio consiste de operações de segunda ordem, operações de operações, para o qual um sistema proposicional é usado. Neste período as intuições propostas por Fischbein são:

- Intuição de sorte – Segundo Piaget e Inhelder, os adolescentes estabelecem relações não determinadas de fenómenos aleatórios de acordo com os esquemas operacionais. Uma vez que o acaso é tratado com a utilização de esquemas operacionais, torna-se inteligível e a síntese entre o aleatório e o operacional conduz o adolescente para o conceito de probabilidade. Para Fischbein as coisas são mais complicadas, a síntese entre o aleatório e o dedutível não é realizada espontaneamente e completamente no nível das operações formais. Em experiências onde o sujeito é foçado a reconhecer probabilidades iguais em diferentes condições experimentais, o adolescente "tropeça" no imprevisível e olha para as dependências causais que reduzem a incerteza, mesmo em situações onde não pode haver tais dependências. A estrutura operacional do pensamento formal sozinho não pode fazer mudanças inteligíveis, mesmo pensando que pode providenciar esquemas que são necessários para tal, nomeadamente a capacidade combinatória, a proporcionalidade e a implicação. A justificação que Fischbein encontra para esta deficiência é que as tradições culturais e educacionais da sociedade moderna orientam o pensamento em direcção ao determinismo, explicações unívocas, segundo o qual os eventos aleatórios estão além dos limites do racional e científico. O resultado é que a intuição de sorte torna-se irreconciliável com a estrutura do pensamento lógico e é relegado para um status inferior, como um método inadequado de interpretação que não cumpre as normas científicas. Fischbein (1975) resume esta intuição da seguinte forma: "O pensamento lógico-cientifico do adolescente é construído em desconsideração da intuição de sorte, e por isso sem a totalidade das estruturas formais que seriam capazes de traduzir os termos possíveis em termos de construções racionais" (p.127).

- A intuição de frequência relativa – Pesquisas efectuadas com crianças de diferentes idades mostraram que a correspondência entre a frequência relativa e a probabilidade se torna mais rápida com a idade e continua a melhorar mesmo durante a adolescência. Se apenas uma resposta é reforçada, verifica-se que as crianças ao nível das operações concretas escolhem a resposta reforçada com menor frequência do que as crianças do nível pré-escolar. Mas depois dos 11 anos, a proporção de escolhas das respostas reforçadas é de novo elevada. Se o sujeito faz previsões erradas, o efeito de preferência é intensificado e torna-se o alvo principal. Fischbein conclui que os adolescentes fizeram progressos em comparação com a idade anterior no que concerne à intuição de frequência relativa, particularmente nos casos em que a previsão tem algum resultado prático.
- Procedimentos combinatórios – Piaget e Inhelder consideram que durante o nível operacional formal a criança torna-se capaz de usar procedimentos sistemáticos ao

criar inventários para todas as possíveis permutações, arranjos e combinações dos elementos de um dado conjunto. Fischbein considera que isto é apenas potencial para a maioria dos sujeitos e que do seu ponto de vista seria mais preciso dizer que estas crianças são capazes de assimilar procedimentos combinatórios com a ajuda da instrução, o que também acontece com as crianças de 10 anos de idade. Neste último caso, apesar de haver diferenças entre estes dois níveis de idades, eles são muito parecidos.

- Estimação de hipóteses – A "performance" dos adolescentes em estimar probabilidades é superior ao das crianças mais novas, excepto nas situações em que a igualdade de hipóteses foram determinadas por disposição geométrica do aparato experimental. Quando o material consiste num saco de bolas, as crianças de 12 anos dão respostas correctas logo de início, mesmo nos casos em que elas têm de comparar proporções com condições desiguais. Esta conclusão é prevista pela teoria de Piaget e o que Fischbein acrescentou a este facto foi que as crianças de 9-10 anos também respondem correctamente nestas situações se receberem instrução adequada.
- Efeito da instrução – Fischbein proporcionou instrução sobre os conceitos de acontecimento, espaço amostral, acontecimento elementar, acontecimento composto, probabilidade como medida do acaso, frequência relativa e análise combinatória. Os adolescentes revelaram uma grande receptividade e interesse pela instrução, tendo-se concluído serem capazes de entender e aplicar correctamente os conceitos ensinados. Segundo o autor, terá contribuído para tal explorar como ponto de partida a reestruturação da base intuitiva dos adolescentes. Para Fischbein, os modelos geradores (por exemplo, diagramas de árvore, no caso das operações combinatórias) são os melhores dispositivos de ensino para a construção de intuições secundárias.

2.3. Probabilidade condicionada

Na nossa prática de ensino verificamos que os alunos apresentam muitas dificuldades na aquisição e aplicação dos conceitos de probabilidades. No tema Probabilidades e Combinatória, do currículo do 12° ano de escolaridade, um dos tópicos que é proposto ser estudado é o de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Trata-se de conceitos onde os alunos apresentam muitas dúvidas e dificuldades, apesar da grande importância que lhes é atribuída nos Exames Nacionais e nos Testes Intermédios, pois trata-se de temas constantes em todas essas provas de avaliação externa da responsabilidade do Ministério da Educação.

Tarr e Lannin (2005) consideram que no desenvolvimento dos currículos matemáticos a probabilidade condicionada e a independência emergiram como um assunto a destacar nos currículos dos alunos do ensino secundário. Apesar de alguns documentos (e.g. NCTM, 2000) restringirem o estudo formal da probabilidade condicionada aos alunos do ensino secundário, Watson (1995) argumenta que é um "mau serviço" deixar o estudo da probabilidade condicionada para os últimos anos da escola secundária, advogando que os conceitos de probabilidade condicionada e de independência devem ser introduzidas no ensino básico e ensinados de uma forma intuitiva. Para esta autora trata-se de conceitos que são apropriados para os currículos dos alunos do ensino básico, não havendo necessidade de os adiar até que os alunos tenham desenvolvido *skills* robustos na comparação de fracções, pois em todos os estudos recentes se verificou que os alunos usaram uma variedade de estratégias para fazer juízos correctos em probabilidades condicionadas e muitos efectuaram-nos sem o uso de fracções ou probabilidades numéricas. Verificou-se ainda nos estudos realizados que os alunos inventaram as suas próprias estratégias para fazer juízos válidos. É portanto importante que se estude os raciocínios e as estratégias que os alunos utilizam quando confrontados com situações que envolvem probabilidades condicionadas.

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) consideram que os professores de estatística geralmente consideram que as pessoas têm grande dificuldade com a probabilidade condicionada. Alguns problemas parecem ser causados pela linguagem formal ou por notações algébricas, embora seja uma surpresa tal dificuldade quando a probabilidade condicional é expressa em termos de percentagens simples, como é o caso da "percentagem de fumadores que têm cancro."

Muitas vezes ao calcularmos a probabilidade de um acontecimento já dispomos de novas informações, as quais influenciam o valor da probabilidade pretendida – "a probabilidade de um acontecimento pode mudar se nova informação se torna disponível; isto é modelado pela noção de probabilidade condicionada" (Borovcnik et al., 1991, p. 48). Falk (1989) considera que:

> Muitas questões acerca de acontecimentos incertos, quer na vida diária ou em contextos profissionais ou académicos, são respondidas com "depende...". Há uma boa razão para isto: queremos condicionar a nossa resposta por informação relevante. Consequentemente, a nossa quantificação da incerteza acerca do acontecimento assinalado é expresso como uma probabilidade condicionada. (p. 175)

Pelo que considera que, em princípio, todas as probabilidades podem ser consideradas como probabilidades condicionadas. Mesmo as chamadas probabilidades absolutas ou não condicionadas, são condicionadas pelo espaço amostral onde o acontecimento está definido.

Estrada, Díaz e de la Fuente (2007) consideram que

> (...) a probabilidade condicionada é fundamental nas aplicações da estatística, porque permite incorporar mudanças no grau de crença sobre os sucessos aleatórios à medida que adquirimos nova informação. É também um conceito teórico básico requerido na construção do espaço amostral produto. (p. 1)

Consequentemente, estas autoras consideram que o raciocínio e a compreensão correcta do conceito são fundamentais não só para estudos mais avançados de inferência estatística mas também porque na nossa vida quotidiana a tomada de decisões acertadas em situações de incerteza baseiam-se em grande parte no raciocínio condicional.

Têm sido realizadas muitas investigações relacionadas com a compreensão da probabilidade condicionada e independência. Estas investigações têm sido efectuadas tanto no campo da Psicologia, nos estudos sobre o raciocínio e sobre a tomada de decisões em condições de incerteza, como no campo da educação matemática. Neste estudo vamos analisar as investigações realizadas ao nível do campo conceptual e, apesar de escassos, vamos também analisar alguns estudos realizados sobre o ensino desta temática.

Wonnacott e Wonnacott (1990) consideram que a probabilidade condicionada é apenas o conceito familiar do limite da frequência relativa, mas com uma pequena diferença – o conjunto de resultados está restringido por uma condição.

Intuitivamente, a probabilidade condicionada de um acontecimento A conhecida a probabilidade de outro acontecimento B, que se representa por $p(A/B)$, define-se pela expressão $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, com $p(B) > 0$.

Desta fórmula podemos deduzir o teorema das probabilidades conjuntas que, segundo Ventsel (1973), diz que a probabilidade da conjunção de dois acontecimentos é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicionada do outro, calculado sob a condição que o primeiro aconteceu. Temos então que a expressão que dá o valor de uma probabilidade conjunta é $p(A \cap B) = p(B) \times p(A/B)$, supondo que B ocorreu.

Um conceito que está ligado à probabilidade condicionada é o conceito de independência. Diz-se que um acontecimento A é independente do acontecimento B se a probabilidade de A não depende de que B aconteça ou não. O acontecimento A é dependente de B sempre que a probabilidade de A se altera pela ocorrência do acontecimento B. Uma das consequências do teorema das probabilidades conjuntas é que se A é independente de B, então B não depende de A. Em virtude deste corolário, prova-se que a dependência ou a independência de dois acontecimentos é sempre recíproca, o que permite então definir que dois acontecimentos são independentes se a realização de um não altera a probabilidade da realização do outro, isto é, $p(A/B) = p(A)$. A noção de independência pode ser estendida a um número qualquer de acontecimentos, pelo que se pode afirmar que vários acontecimentos são mutuamente independentes se nenhum deles depende de toda a combinação dos outros (Ventsel, 1973).

Segundo esta autora, um outro corolário que podemos obter do teorema das probabilidades conjuntas é que a probabilidade da conjunção de dois acontecimentos independentes é igual ao produto das probabilidades destes acontecimentos. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Também este corolário pode ser estendido a vários acontecimentos.

Algumas investigações analisaram as dificuldades sentidas pelos alunos na compreensão e na aplicação destas definições, pretendendo estudar se os estudantes compreendem os conceitos e se são capazes de aplicá-los na resolução de problemas e na tomada de decisões na vida quotidiana. Coutinho (1994, citado por Figueiredo, 2000) concluiu nas suas investigações que existem concepções, como por exemplo a crença na equiprobabilidade, que dificultam a aprendizagem devido à ausência de informações sobre o acontecimento a ser observado. Outra dificuldade também mencionada é que as concepções erróneas podem persistir mesmo após a aprendizagem dos conceitos.

Fernandes (1990) considera que o conhecimento da existências de concepções erradas nas pessoas em geral e nos alunos em particular pode ter uma influência muito importante no processo ensino-aprendizagem e a sua importância é realçada na medida em que aceitamos que o sujeito tem um papel activo na construção do seu conhecimento. Este autor refere-se a tipos de concepções erradas que resultam "da adesão às heurísticas da representatividade e da disponibilidade e de raciocínios baseados em factores causais e na falácia da conjunção" (Fernandes, 1990, p. 37).

Na procura de respostas a questões probabilísticas colocadas na vida quotidiana, as pessoas confiam frequentemente na *heurística da representatividade*, que segundo Tversky e Kahneman (1982) significa que as probabilidades são avaliadas a partir da representatividade do acontecimento A em relação ao acontecimento B (para Fischbein, 1975, esta concepção é designada por intuição amostral). Tversky e Kahneman (1982) consideram que esta heurística pode conduzir a erros sérios porque a semelhança ou a representatividade não é influenciada por certos factores que influenciam o julgamento probabilístico:

(a) Insensibilidade às probabilidades prévias (ou *a priori*) dos resultados. e Tversky e Kahneman (1982), consideram relevantes para a previsão três tipos e informação – (1) a informação *a priori*, (2) a evidência especifica respeitante ao caso individual e (3) a precisão esperada;

(b) Insensibilidade à dimensão da amostra. As pessoas têm tendência em avaliar a probabilidade de uma estatística amostral em função da sua semelhança com o correspondente parâmetro da população, o que implica que esta avaliação seja produzida independentemente da dimensão da amostra;

(c) Concepções erradas do acaso. As pessoas esperam que uma sequência de resultados gerados por um processo aleatório representará as características gerais deste processo, mesmo quando a sequência é curta. Kahneman e Tversky (1982) consideram que a noção intuitiva de aleatório envolve três propriedades gerais: ausência de padrões sistemáticos, irregularidades e representatividade local.

Na *heurística da disponibilidade* as pessoas avaliam a frequência de uma classe ou probabilidade de um acontecimento em função da facilidade com que exemplificações ou ocorrências podem ser construídas, evocadas ou associadas. No entanto, tal como no caso da herística da representatividade, Tversky e Kahnemam (1982) consideram que o julgamentos probabilísticos são influenciados por outros factores que, especificamente: (I) influências devidas à recuperabilidade das exemplificações; (II) influências devidas à eficiência de procura de um conjunto; (III) influências de imaginabilidade.

A *estratégia do resultado* é um padrão sistemático de erros sistemático identificado por Konold (1983) citado por Fernandes (1990). Segundo Konold, este padrão de erros possui três características fundamentais: (a) experiência única – quando se questiona sobre acontecimentos de carácter repetitivo, os sujeitos consideram que estão a ser questionados acerca de uma só experiência; (b) decisão – a previsão dos resultados das experiências é feita na forma "sim" ou "não", donde resulta que uma previsão só é boa se o resultado previsto ocorre; (c) previsão do resultado a partir de causas – a previsão do resultado de um acontecimento efectua-se à custa de interpretações de causalidade, em oposição a interpretações aleatórias.

No caso da *causalidade*, muito embora no cálculo normativo de probabilidades condicionadas não seja relevante a consideração de possíveis relações entre os acontecimentos

A e B (Fernandes, 1990), as pessoas frequentemente avaliam tais probabilidades em função da identificação de tais relações. Mesmo perante casos de relações simplesmente sugeridas, as pessoas usam-nas para fazer julgamentos probabilísticos ou para estimar valores de probabilidades. São quatro os tipos de relações diferentes entre A e B identificadas por Tversky e Kahnemam (1982), que as pessoas podem usar na avaliação de $p(A/B)$: (1) B é considerado como referência causal de A – quando B é entendido como causa da ocorrência ou não ocorrência de A; (2) B é considerado como referência diagnóstica de A – quando A é tratada como uma possível causa de B; (3) B é considerado indicador de A – quando B não é entendida como causa nem como efeito de A, mas são ambas vistas como consequência de um outro factor; (4) B é considerado incidental – quando A e B não parecem estar relacionados através de qualquer ligação causal directa ou indirecta.

Falk, (1986) estudou as resoluções dos alunos da questão 6 do teste usado no presente estudo:

> **6.** Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.
> **a)** Qual a probabilidade da segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca?
> **b)** Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?

Pretendendo avaliar o impacto da relação entre o acontecimento causal e o acontecimento diagnóstico na avaliação da probabilidade da alínea b), o autor verificou que muitos alunos consideraram que não faz sentido condicionar um acontecimento a outro que ocorre posteriormente. Enquanto a segunda bola extraída depende causalmente do que aconteceu com a primeira bola, o contrário não foi considerado verdadeiro pelos alunos, muito embora o impacto informacional da 2ª bola ser branca na 1ª bola ser branca seja igual ao da 1ª bola ser branca na 2ª bola ser branca. Psicologicamente estes dois problemas não são entendidos como simétricos, pois enquanto a primeira inferência é natural, a segunda "inferência para trás" cria dificuldades uma vez que apela a raciocínios probabilísticos em que se verifica uma inversão da sequência temporal.

Tversky e Kahneman (1982) identificaram nos seus estudos os seguintes raciocínios causais e diagnósticos:

– Assimetrias inferenciais – as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos;

– Significado causal e diagnóstico da evidência – as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar as suas implicações diagnósticas acerca do passado.

A avaliação natural a partir da representatividade, da disponibilidade ou da causalidade não concorda frequentemente com a teoria lógica da regra da extensão (se $A \supset B$, então $p(A) \geq p(B)$). Ora, frequentemente, as pessoas aderem à *falácia da conjunção*, que afirma que $p(A \cap B) \leq p(A)$ e $p(A \cap B) \leq p(B)$, levando a que se produzam erros sistemáticos nos julgamentos probabilísticos. Este erro consiste em considerar que a probabilidade da conjunção de dois acontecimentos é maior do que a probabilidade de cada um dos seus acontecimentos constituintes.

Para Tversky kahneman (1983), nos juízos falaciosos da conjunção poderão estar subjacentes factores causais, e com base na análise destes factores propuseram dois paradigmas explicativos da influência da causalidade. Perante um modelo M, um acontecimento básico B e um acontecimento acrescentado A, estes autores verificaram que: (1) quando A é altamente representativo de M, então M é visto como causa de A; (2) quando A é altamente representativo de B, então B é visto como causa de A.

Para Falk (1986), num tratamento normativo da probabilidade condicionada, a distinção entre os vários tipos de relação entre A e B é imaterial e o impacto dos dados dependem unicamente do seu grau de informação. No entanto, Tversky e Kahneman (1982) mostraram que, pelo contrário, o impacto psicológico dos dados depende criticamente do seu papel no esquema causal. Por causa da prevalência de esquemas causais na nossa percepção do mundo, os dados causais têm maior impacto na nossa inferência probabilística do que outros dados com igual objectivo de informação.

Díaz, (2009) considera que a causalidade é um conceito científico, filosófico e psicológico complexo, mas é também um conceito intuitivamente compreendido e aceite pelas pessoas uma vez que todo o nosso conhecimento é construído numa base de relações de causa e efeito entre diversos acontecimentos.

2.4. Aprendizagem do conceito de probabilidade condicionada

2.4.1. Concepções e aprendizagem

Segundo Fernandes (1990), o conhecimento da existências de concepções erradas nas pessoas em geral e nos alunos em particular pode ter uma influência muito importante no processo ensino-aprendizagem, e a sua importância é realçada na medida em que aceitamos que o sujeito tem um papel activo na construção do seu conhecimento.

Esta visão construtivista tem como principais características:

O que existe no cérebro do aprendiz é importante;

A procura de sentido, por parte do aprendiz, supõe o estabelecimento de relações;

Quem aprende constrói activamente significados;

Os estudantes são responsáveis pela sua própria aprendizagem.

Aceitando a existência destas concepções adquiridas informalmente, podemos considerá-las como ponto de partida para um ensino mais eficaz na medida em que permitem melhor compreender as mudanças que o aprendiz terá de percorrer "até atingir ideias consonantes com o paradigma científico que a escola procura desenvolver nos seus alunos" (Fernandes, 1990, p. 13).

Todos os autores estudados e que têm centrado as suas investigações no ensino da probabilidade condicionada são unânimes em considerar de extrema importância as concepções que os alunos têm, mesmo que erróneas, como base para a aquisição e compreensão do conceito de probabilidade condicionada e também de acontecimentos independentes.

Cada um destes conceitos está associado a uma definição matemática precisa que indica as inter-relações existentes entre eles. Hogg e Tanis (1993), citados por Tarr e Lannin (2005), assinalam que em algumas experiências aleatórias só nos interessa os resultados que são elementos de um subconjunto B de um espaço amostral S. Nestas circunstâncias, a probabilidade condicionada de um acontecimento A, considerando a realização do acontecimento B, isto é, p (A/B), é a probabilidade de A considerando como resultados possíveis apenas aqueles da experiência aleatória que são elementos de B. Logo, a probabilidade de um acontecimento A é avaliada sob as condições de um novo espaço amostral, condicionado pela ocorrência do acontecimento B.

Estes autores consideram ainda que temos de considerar no cálculo da probabilidade condicionada se esta se refere a experiências sem ou com reposição, pois nas experiências sem reposição a probabilidade condicionada é mais explícita porque a redução do espaço amostral é visível. Assim, é geralmente aceite que a compreensão de um estudante da probabilidade condicionada é demonstrada pela sua habilidade de reconhecer e ajustar a probabilidade de um acontecimento quando ele é alterado pela ocorrência de outro, ou seja, quando o aluno é capaz de "rever julgamentos em probabilidades perante novas informações disponíveis" (Borovcnik & Bentz, 1991, p. 90).

Gras e Totohasina (1995a), citando Steinberg, consideram que na teoria das probabilidades o conceito de probabilidade condicionada e o de independência estocástica são muito difíceis de entender no início da aprendizagem. Verifica-se pela história da ciência que o primeiro é definido com um grande atraso em relação ao segundo (Moivre, 1738, citado por Gras & Totohasina, 1995a). Para estes autores, para formalizar o conceito da probabilidade condicionada, foi necessária a axiomática de Kolmogorov (1933) pois, esta, foi capaz de dar um passo atrás em relação a contextos concretos.

Figueiredo (2000), no seu estudo sobre "Probabilidade Condicionada: um enfoque de seu ensino-aprendizagem", refere um estudo efectuado por Green (1982), com alunos dos 11 aos 16 anos, onde analisou os seus níveis de desenvolvimento Piagetiano e os conhecimentos que os alunos demonstravam sobre os conceitos de probabilidade e a sua linguagem de incerteza. Deste estudo ressaltam as seguintes conclusões: (i) muitos dos estudantes ainda não atingiram por volta dos 16 anos o estádio das operações formais; (ii) os diagramas de árvore e o princípio multiplicativo são pouco entendidos pelos alunos; (iii) o conceito de aleatoriedade ainda é quase completamente ausente nos alunos da facha etária dos 11 aos 16 anos. Refere ainda um estudo elaborado por Fischbein e Lecoutre (1998) com alunos entre os 10 e os 18 anos, com o intuito de analisar com a idade como os alunos aplicam os seus conhecimentos em situações que envolvem probabilidades, sendo de realçar a conclusão de que os alunos manifestavam grandes dificuldades em probabilidades condicionadas, principalmente quando envolviam o chamado "fenómeno Falk", isto é, quando o acontecimento condicionante ocorre depois do condicionado.

Investigações realizadas por Fischbein e Gazzit (1984) mostram que quando os alunos são questionados para calcular valores de probabilidades condicionadas em situações com e sem reposição, a percentagem de respostas correctas foi em geral mais baixa nas situações sem reposição e identificaram dois equívocos fundamentais nos raciocínios dos alunos em probabilidade condicionada: os alunos (I) não perceberam que o espaço amostral foi modificado nas situações de sem reposição; e (II) calcularam a probabilidade de um acontecimento em situações sem reposição fazendo a comparação entre o número de casos favoráveis para o acontecimento antes e depois da primeira tiragem em vez de fazerem comparações com o número total de resultados (pp. 8-9). Tarr e Lannin (2005) consideram que em situações sem reposição a probabilidade condicionada torna-se particularmente explicita porque a redução do espaço amostral é visível, enquanto em situações com reposição isso não acontece.

Ainda num outro estudo, Tarr (2002) considera que os julgamentos dos alunos em probabilidade condicionada são prejudicados pela interpretação abusiva da frase "50% de hipóteses" de duas maneiras diferentes: quando o espaço amostral tem dois elementos, os alunos assumem muitas vezes que cada saída tem 50% de hipótese, mesmo quando os dois elementos não têm igual probabilidade; e aplicam a frase em situações de probabilidades em que mais do que duas saídas num espaço amostral têm iguais hipóteses de ocorrerem, e concluem que cada um acontecimento tem 50% de hipóteses. As duas utilizações inválidas de "50% de hipóteses" foram problemáticas quando os alunos consideraram a probabilidade condicionada em situações sem reposição. A persistência dos alunos na frase impede muitas vezes de reconhecer que a probabilidade de todos acontecimentos se altera em situações de não reposição.

As conclusões dos estudos realizados por Fischbein e Gazit (1984) e por Tarr (2002) demonstram claramente que o objectivo primário do ensino deve ser o desenvolvimento da ideia de que o espaço amostral se altera em situações de não reposição. O ensino da probabilidade condicionada deve levar os alunos a verificar que apesar de numa experiência sem reposição os valores do acontecimento poderem não sofrer alteração na primeira experiência, o espaço amostral fica sempre alterado, (se pensarmos numa urna com 3 bolas verdes e 2 pretas , se na primeira tiragem saiu preta, na segunda tiragem o número de bolas verdes é o inicial, mas o total de bolas no saco está alterado).

Ligado ao conceito de probabilidade condicionada temos o conceito de dependência e independência de acontecimentos. Tal como na probabilidade condicionada, os estudos realizados mostram que alunos apresentam também dificuldades de compreensão deste conceito.

Garfield e Ahlgren, (1988) verificaram que os alunos de todas as idades são propícios a exibir vários equívocos quando observam uma série de ensaios de independência ou quando consideram probabilidades em situações de não reposição, sugerindo que o o ensino do conceito de independência deve ser organizado de forma a abordar todos os aspectos problemáticos do pensamento probabilístico. Em particular, a "representatividade" é indiscutivelmente um grande impedimento para a compreensão e o desenvolvimento do conceito de independência. A instrução deve desenvolver a noção de que o espaço amostral é preservado em situações com repetição, o que representa a chave para a aquisição e compreensão do conceito de independência.

Apesar das investigações sobre o pensamento dos alunos em probabilidade condicionada e independência descreverem vários aspectos da forma como os alunos pensam, nenhum deles prevê um modelo coerente para o pensamento em probabilidade condicionada e independência dos alunos das escola básicas e secundárias. Estudos recentes realizados por vários investigadores (e.g., Jones et al., 1996; Jones et al., 1997; Jones et al., 1999; Tarr & Jones, 1997) abordam este vazio formulando e validando quadros cognitivos que capturam e enquadram a natureza múltipla do pensamento probabilístico. Teóricos neo-piagetianos, como por exemplo Bigs e Collins (1991) e Tarr e Jones (1997) consideram que o pensamento em probabilidade condicionada e independência dos alunos do ensino básico e secundário se desenvolve ao longo de quatro níveis, que representam um contínuo desde o pensamento subjectivo até ao raciocínio numérico, como é descrito no quadro 4.

Quadro 4 – Quadro de avaliação do pensamento dos alunos em probabilidade condicionada e independência (Tarr & Jones, 1997)

	Nível 1 (Informal)	Nível 2 (Transicional)	Nível 3 (Quantitativo Informal)	Nível 4 (Numérico)
Probabilidade condicionada	• Reconhece acontecimentos "certos" e "impossíveis" em situações com reposição e sem reposição; • Utiliza geralmente raciocínios subjectivos quando considera a probabilidade condicionada em situações com e sem reposição; • Ignoram informações	• Reconhecem que a probabilidade de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, contudo esse reconhecimento é incompleto e é usualmente confinado a acontecimentos que aconteceram previamente; • Usam inapropriadamente os números ao determinar	• Reconhecem que a probabilidade de todos os acontecimento se altera em situações de não reposição; • Mantêm o controle da composição total do espaço amostral para julgar o relacionamento de dois acontecimentos nas situações com e sem reposição; • Conseguem quantificar, embora sem precisão, a	• Atribuem probabilidades numéricas em situações com e sem reposição; • Usam raciocínios numéricos para comparar a probabilidade de acontecimentos antes e depois de cada tentativa em situações com e sem reposição; • Estabelecem as condições necessárias ao abrigo das quais

	numéricas ao formularem previsões.	probabilidades condicionadas. Por exemplo quando um espaço amostral contém dois resultados, assumem sempre que os dois resultados são equiprováveis; • A representatividade actua como causa de confusão ao tomar decisões em probabilidade condicionada; • Podem reverter julgamentos subjectivos.	mudança de probabilidades nas situações sem reposição.	dois acontecimentos estão relacionados.
Independência	• Predisposição para considerar que acontecimentos consecutivos estão sempre relacionados; • Crêem com segurança que podem controlar os resultados de uma experiência; • Usam raciocínios subjectivos que se opõem a qualquer foco significativo na independência; • Exibem confianças injustificadas quando prevêem resultados sucessivos.	• Mostram algum reconhecimento quanto ao facto de acontecimentos consecutivos estarem relacionados ou não; • Usam frequentemente a estratégia da representatividade, quer no sentido positivo quer no negativo; • Podem também reverter raciocínios subjectivos.	• Reconhecem quando o resultado do primeiro acontecimento influencia ou não o resultado do segundo. Nas situações com reposição vêem que o espaço amostral é restaurado; • Podem diferenciar, embora sem precisão, acontecimentos independentes e dependentes em situações com e sem reposição; • Algumas reversões de representatividade.	• Distinguem acontecimentos independentes e dependentes em situações com e sem reposição, usando probabilidades numéricas para justificar o seu raciocínio; • Observam os resultados de tiragens sucessivas, mas rejeitam a estratégia da representatividade; • Mostram relutância ou recusa para prever resultados quando os acontecimentos são equiprováveis.

Complementando a informação constante no quadro 4, Tarr. e Lannin (2005) consideram ainda que os estudantes do nível 1 tendem a confiar nos julgamentos subjectivos; geralmente acreditam que podem controlar os resultados de um acontecimento e ignoram informação quantitativa relevante na formulação de julgamentos probabilísticos; a falta de referências quantitativas conduz estes alunos a formarem julgamentos quantitativos através da sua própria realidade, pela imposição do seu próprio sistema de regularidades ou procurando por padrões que não existem. Adicionalmente estes alunos usam muitas vezes a sua própria experiência quando prevêem os resultados de um acontecimento e isto leva-os a acreditar que os resultados anteriores influenciam os futuros.

Os estudantes que exibem o nível 2 caracterizam-se por um pensamento em transição entre o subjectivo e o quantitativo informal; apesar de algumas vezes fazerem uso apropriado da informação quantitativa em probabilidade condicionada, são muitas vezes distraídos por características irrelevantes, o que significa que os alunos deste nível tendem a ser muito confiantes na distribuição da previsão dos resultados quando fazem previsões e, consequentemente, são muito propensos a invocar a estratégia da representatividade, a incorporar orientações recentes quer no sentido positivo quer no negativo. Ao considerar a probabilidade condicionada, quando utilizam raciocínios quantitativos o seu pensamento é limitado. Os alunos deste nível são capazes de reconhecer que a probabilidade de alguns acontecimentos se altera nas situações de não reposição, mas este reconhecimento é usualmente restrito a acontecimentos que ocorreram previamente.

Quando exibem o nível 3 de pensamento, os alunos já têm consciência do papel que o quantitativo tem ao formular julgamentos em probabilidade condicionada. Embora não costumem atribuir probabilidades numéricas precisas, usam frequentemente as frequências relativas, os rácios, ou alguma forma de probabilidades como uma estratégia adequada para determinar probabilidades condicionadas em ambos os casos: com ou sem reposição. Monitorizam a composição completa do espaço amostral e reconhecem usualmente que a probabilidade condicionada se altera em situações de não reposição.

Os alunos do nível 4 atribuem espontaneamente probabilidades numéricas quando interpretam situações de probabilidades. Dado que os alunos estão conscientes do papel que os números desempenham na formação de juízos em probabilidades, monitorizam de perto a composição do espaço amostral e reconhecem a sua importância para verificar se dois acontecimentos são independentes ou dependentes. Os alunos deste nível podem usar probabilidades numéricas para rejeitar a representatividade indicando que "não interessa o que acontece antes".

Díaz. e de la Fuente (2007) consideram ainda que os níveis de dificuldade determinados pelos níveis descritos antes subsistem mesmo em alunos universitários e, tendo como base vários estudos, identificam-nas como sendo de:

- *Condicionamento e causalidade:* algumas pessoas identificam como similares a condicionalidade e a causalidade, ainda que a relação $p(A/B)$ seja devida a uma relação diagnóstica se A é causa de B e como uma relação causal se B é causa de A. (Tversky & Kahneman, 1982b);

- *Falácia do eixo de temporal* (Falk, 1989) ou crença de que um sucesso não pode condicionar outro que ocorra anteriormente. Gras e Totohasina (1995) identificaram dois equívocos acerca da probabilidade condicionada, que são:
  - A concepção cronológica, onde os alunos interpretam a probabilidade condicionada $p\ (A/B)$ como uma relação temporal, quer dizer, o acontecimento condicionador B deve sempre preceder o acontecimento condicionado A;
  - Concepção causal, onde os alunos interpretam a probabilidade $p\ (A/B)$ como uma relação causal implícita, quer dizer, o acontecimento condicionante B é a causa e o acontecimento condicionado A é a consequência;
- *Situações sincrónicas e diacrónicas:* se o problema se coloca em situações sequenciais (situações diacrónicas) ou em situações simultâneas (sincrónicas) (Falk, 1989; Ojeda, 1995). Embora Sánchez e Hernandez (2003) considerem que essas duas situações são similares, os alunos não as entendem assim. Os alunos adicionam as probabilidades em vez usar a regra do produto quando determinam probabilidades em situações sincrónicas, mas usam correctamente a regra em situações diacrónicas;
- *Resolução de problemas bayesianos*: as pessoas não usam o teorema de Bayes de forma intuitiva, considerando que uma das dificuldades nesta resolução é devida à não representação correcta do problema;
- Outras dificuldades incluem compreender o conceito de independência, a crença de que é mais provável a intersecção de dois acontecimentos do que cada um dos seus acontecimentos constituintes (Estrada, Díaz & de la Fuente, 2007; Sanchez, 1996;) e a confusão das duas probabilidades: $P(A/B)$ e $P(B/A)$ (Falk, 1989).

É importante conhecer as concepções que os alunos trazem para que, apoiadas nelas, desenvolvam os conceitos que vão conduzir a um melhor conhecimento do conceito. ”Uma concepção, mesmo que errada, é identificável mais como um conhecimento relativo a um conceito do que como uma falha” (Gras & Totohasina., 1995a, p. 338). As confusões clássicas entre, por um lado, a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta e, por outro lado, entre as noções de independência estocástica e de incompatibilidade são facilmente visíveis nas resoluções dos alunos. Mais delicado de identificar, segundo Gras e Totohasina (1995a), são as concepções erróneas relativas à noção de probabilidade condicionada. Estas concepções só se identificam quando um aluno recusa responder a uma questão ou utiliza procedimentos supérfluos na sua resolução, e são de três tipos: a concepção cronológica, a concepção causal e a concepção cardinalista.

Totohasina (1992) (citado em Gras e Totohasina 1995) identificou três concepções de carácter cognitivo (ver quadro 5) que podem constituir entraves ao correcto raciocínio em probabilidade condicionada, considerando que as duas primeiras são mais susceptíveis de se constituírem como entraves de carácter epistemológico (uma resistência à reversibilidade da noção) e a terceira como um entrave mais de carácter didáctico, podendo ser explicada pelo fenómeno de imersão habitualmente encontrado para a situação de extensão de um conceito.

Quadro 5 – Concepções de carácter cognitivo que podem constituir entraves ao correcto raciocínio em probabilidade condicionada

Concepção	Descrição
Concepção cronológica da probabilidade condicionada $P(A/B)$	Esta concepção consiste em entender a probabilidade condicionada como impondo sistematicamente uma relação temporal entre os dois acontecimentos A e B. Se o acontecimento B se realiza antes do acontecimento A, uma questão que inverta a sequência temporal, pedindo a probabilidade do acontecimento passado conhecido o futuro, parece totalmente desprovida de sentido para os alunos.
Concepção causal da probabilidade condicional $P(A/B)$	Esta concepção manifesta-se pela introdução, ainda que implícita, de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante B e o acontecimento condicionado A. Neste caso, perguntar a um aluno para inverter esta relação e calcular a probabilidade de uma causa conhecendo a consequência pode também ser considerado desprovida de sentido.
Concepção cardinal da probabilidade condicionada	Esta concepção consiste na tendência sistemática de representar a probabilidade condicionada $P(A/B)$ pela quantificação do quociente $\frac{card\{A\cap B\}}{card\{B\}}$, que é correcta no caso particular de equiprobabilidade. Outros interpretam $P(A/B)$ como a proporção $\frac{card\{A\}}{card\{B\}}$, que é geralmente falsa.

Para estudar as concepções identificadas, Gras e Totohasina (1995a) efectuaram um estudo com os alunos de duas turmas do último ano do ensino secundário, que tinham sido sujeitos ao ensino de probabilidades de forma relativamente comparável, apesar de, pelo facto de uma turma ser do curso de letras e a outra ser do curso de ciências, não terem as mesmas motivações e competências, em particular no tratamento das expressões formais. As escolhas didácticas e as hipóteses subjacentes a esta investigação foram:

- A noção de percentagem e a de divisão facilitam a aquisição da fórmula da probabilidade composta. Esta última servirá, de seguida, de apoio para fazer emergir o conceito de probabilidade condicionada. Sabe-se, na verdade, que a noção de percentagem possui pelo menos as características epistemológicas seguintes:
  - É indissociável do conceito de proporção;
  - Está associada aos contextos que evocam o modelo exclusivamente multiplicativo, ou simplesmente um operador de multiplicação.
- A análise do problema através do diagrama de árvore permite saltar sem muito risco a etapa das operações agrupadas (Parzysz, 1990, citado em Gras & Totohasina, 1995a). Por outro lado, o uso do diagrama de árvore pode diminuir o efeito de inversão das situações no caso em que pretendemos estudar a probabilidade de um acontecimento passado, conhecido o futuro. A análise de um problema através de uma resolução gráfica, como o caso do diagrama de árvore, tem um efeito útil na resolução de problemas de probabilidade condicionada e mesmo de problemas do tipo bayesiano que são relativamente complexos.

Deste estudo ressalta o uso do diagrama de árvore como sendo uma ferramenta importante para a resolução de problemas de probabilidade condicionada. O uso do diagrama de árvore e de tabelas de contingência são representações didácticas também recomendadas por Godino, Batanero e Cañizares (1996) para trabalhar os modelos probabilísticos.

Pollatsek et al. (1987) consideram que há poucos dados sistematizados acerca de como as pessoas entendem os diferentes tipos de enunciados de probabilidade condicionada e os tipos de dificuldades que têm com eles. Estes autores consideram ainda que há várias possíveis fontes de erro. As pessoas podem ter dificuldades com a sintaxe do enunciado do problema da probabilidade condicionada, pelo que o seu desempenho depende dos detalhes do texto. Além disso, várias são as confusões possíveis: a probabilidade de A dado B pode ser confundida com a probabilidade de B dada A ou até com a frequência conjunta de A e B. Uma segunda fonte de erro é a interferência do raciocínio causal. Pode ser confundida condicionalidade com causalidade, seja porque são utilizadas probabilidades condicionais para inferir relações de causalidade ou porque nas declarações de ambas se empregam palavras-chave como "se" e "uma vez que". Além disso, mesmo nos casos em que há só uma relação causal, há duas probabilidades condicionadas: p (A/B) e p (B/A) e ambas podem ser vistas como representativas da mesma relação causal e portanto pensadas como iguais. Mas os erros também podem resultar da crença que as relações causais são mais fortes que as relações diagnósticas (p (efeito/causa)>p (causa/efeito)), muito embora, em geral , a p (efeito/causa) não tem de ser maior do que p (causa/efeito). Há muitas situações nas quais o efeito ocorre somente se múltiplas causas ocorrem.

Tversky e Kahneman (1982) observaram a tendência causal associada à probabilidade condicionada na seguinte questão colocada a vários sujeitos sobre o que consideravam ser mais provável: "(a) que uma rapariga tenha olhos azuis se a sua mãe tem olhos azuis, (b) que a mãe tenha olhos azuis se a filha tem olhos azuis, ou (c) os dois acontecimentos são igualmente prováveis". Verificou-se uma forte tendência para os alunos seleccionarem a opção (a), apesar de quase metade dos inquiridos terem escolhido a resposta correcta (c). Para Tversky e Kahneman (1982) este resultado constitui uma forte evidência da "tendência causal" nos julgamentos em probabilidades condicionadas, para além de poder dever-se a outras razões, incluindo uma não compreensão completa do enunciado do exercício. Uma dificuldade particular com o enunciado desta questão pode resultar da sua interpretação como requerendo um julgamento acerca da causalidade em vez da condicionalidade.

2.4.2. O impacto do ensino no raciocínio dos alunos em probabilidade condicionada

Nesta secção analisamos estudos que se têm realizado no sentido de se entender de que forma o ensino dos conceitos de probabilidade condicionada altera os raciocínios dos alunos. Tarr e Lannin (2005) referem experiências de ensino realizadas recentemente por Castro (1998), Fischbein e Gazit (1984), Jones e al. (1999), Kiczek e Maher (2001) e Tarr (1997), que documentam o crescimento da compreensão dos alunos nos conceitos de probabilidade condicionada e independência. Além de proporcionar "insights" sobre o desenvolvimento do pensamento dos alunos em probabilidades, estes estudos identificam os ambientes de aprendizagem, estratégias de ensino, tarefas de aprendizagem e actividades de avaliação que têm potencial para contribuir para a teoria e a prática de ensino e aprendizagem das probabilidades.

Fischbein e Gazitt, (1984) foram os primeiros investigadores a estudar o impacto do ensino da probabilidade condicionada. No estudo verificou-se um fraco desempenho dos alunos, donde os autores advertiram que estes conceitos não deveriam ser ensinados antes do 6º ano. No entanto, estas conclusões foram relativizadas dado que não foi efectuada uma pré-avaliação do desempenho dos alunos que permitisse examinar o desenvolvimento da compreensão dos alunos, além de ter existido pouca evidência que confirmasse que a intervenção de ensino tenha sido implementada conforme previsto.

Tarr, e Lannin, (2005), referem um estudo realizado por Jones et al. (1999), com o intuito de estudar o impacto da instrução na compreensão das probabilidades de alunos mais novos (do 3º ano), conduziram uma intervenção de ensino ao longo de 16 sessões e com os alunos organizados em pequenos grupos. Em termos de resultados, verificou-se um aumento de conhecimentos dos alunos relativamente aos conceitos de espaço amostral, probabilidade teórica de um acontecimento e comparação de probabilidades. No entanto, a compreensão dos alunos do conceito de probabilidade condicionada ficou muito aquém dos outros conceitos, tendo apenas 1 aluno (em 37) sido capaz de usar raciocínios quantitativos informais ou numéricos em probabilidade condicionada.

Referem ainda uma experiência de ensino efectuada por Tarr (1997) e focalizadas exclusivamente na forma como alunos do 5º ano compreendiam a probabilidade condicionada e a independência. Esta pesquisa, centrada no raciocínio probabilístico dos alunos, apontou para um crescimento estatisticamente significativo na aprendizagem dos alunos em probabilidade condicionada e independência. Especialmente em probabilidade condicionada, antes da intervenção de ensino, 19 alunos (em 26) foram codificados com nível 1 ou 2 e após a intervenção de ensino 22 (em 26) alunos passaram a exibir o nível 3 ou 4. Crescimento similar foi verificado no que respeita ao pensamento dos alunos sobre independência.

A característica chave dos estudos mencionados reside no valor atribuído ao raciocínio dos alunos durante a instrução. Cada um dos programas de ensino foi desenhado para que os alunos previssem o valor de um resultado de uma experiencia particular, de seguida realizassem várias experiências e finalmente reexaminassem a previsão efectuada. Este modelo conduz a uma discussão entre os alunos, especialmente propícia ao aprofundamento dos seus conhecimentos.

Castro (1998) comparou o impacto de duas formas diferentes de ensino: (a) mudança conceptual – consistia em aliciar os alunos a pensar e incentivar a reflexão sobre ideias probabilísticas; (b) ensino tradicional – consistia em apresentar de uma forma linear os conceitos sem consideram as concepções e os equívocos dos alunos. Dos resultados do estudo, salienta-se que os equívocos em probabilidade condicionada e independência foram mais resistentes entre os alunos que receberam o ensino tradicional do que nos alunos sujeitos ao ensino de mudança conceptual. Os alunos sujeitos ao ensino tradicional foram mais propensos em manter as estratégias de representatividade do que os alunos que experimentaram a instrução que os confrontou com os seus equívocos.

Todas as investigações mencionadas ressalvam a importância de entrelaçar a avaliação com o ensino e indicam que a principal tarefa deste centrar-se em despoletar concepções e equívocos particulares dos alunos, permitindo a estes reflectir sobra a eficácia das suas intuições probabilísticas e proporcionando aos professores o acesso a uma reflexão sobre os alunos. Envolver os alunos em tarefas cuidadosamente projectadas permite ao professor, de uma forma formal e informal, avaliar o raciocínio dos alunos e justificar a decisão instrucional tomada.

O ensino deve ter por base os conhecimentos prévios dos alunos, para que com base nesses conhecimentos sejam construídos novos conceitos. Os programas de ensino devem incluir tarefas que façam emergir os conhecimentos do aluno, os quais devem servir de base para fomentar discussões na sala de aula que façam surgir os conceitos que os alunos devam aprender. Segundo Garfield (1995), "quando se pede primeiro aos alunos para fazer previsões, eles ficam mais predispostos a ter cuidado com os resultados" (p. 31). As tarefas de ensino devem encorajar os alunos a examinar novas situações e provocar conflitos cognitivos entre os alunos.

Na perspectiva de ensinar e aprender, é notório que a chave da compreensão da probabilidade condicionada reside em fazer conexões entre o espaço amostral e a probabilidade do acontecimento. Ao ligar o espaço amostral com a probabilidade do acontecimento é possível desenvolver a capacidade de escrever a composição do espaço amostral, fazer comparações de probabilidades condicionadas e constatar que a probabilidade de um acontecimento se altera em situações de não reposição.

Dada a relação existente entre probabilidade condicionada e independência, vários investigadores (e.g., Ahlgren & Garfield, 1991) recomendam a introdução da independência como um caso particular da probabilidade condicionada uma vez que é um conceito mais intuitivo para os alunos. Esta recomendação vem de encontro a conclusões mais recentes (Tarr & Jones, 1997), que consideram que a compreensão dos dois conceitos pelos alunos é promovida pela discussão que incidiu sobre as diferenças entre ambos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

No âmbito de um trabalho de investigação, a metodologia refere-se ao conjunto de opções tomadas no que concerne ao desenho da investigação, à abordagem utilizada para o estudo, às técnicas e instrumentos de recolha e análise de dados, bem como aos aspectos éticos que se necessita de tomar em consideração para conseguir concretizar a investigação. Nesta investigação estudou-se a influência do ensino nos raciocínios que os alunos desenvolvem quando estão perante problemas que envolvem a probabilidade condicionada. Para tal elaborou-se um teste, envolvendo questões de probabilidades condicionadas e solicitou-se aos alunos a sua resolução antes de serem sujeitos ao ensino do tema (pré-ensino). De seguida, as professoras ministraram o ensino dos conceitos de probabilidade condicionada, tendo a investigadora observado essas aulas, e depois pediu-se aos alunos que de novo resolvessem o teste (pós-ensino).

Este capítulo está organizado em quatro secções, onde se apresentam as opções metodológicas que definem e orientam o conjunto de métodos e técnicas utilizados neste estudo, os participantes, os métodos de recolha das informações e, por fim, os procedimentos utilizados para o tratamento dos dados recolhidos.

3.1. Opções metodológicas

No presente estudo procurámos responder às três seguintes questões de investigação:

1 – Que respostas e raciocínios apresentam os alunos do 12.º ano de escolaridade na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois deste conceito ter sido leccionado?

2 – O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12.º ano altera as respostas e raciocínios usados pelos alunos?

3 – Que tipo de ensino é proporcionado aos alunos do 12.º ano de escolaridade para desenvolverem o conceito de probabilidade condicionada?

Nesse sentido, o estudo realizado assumiu uma vertente quantitativa relativamente às duas primeiras questões de investigação e uma vertente qualitativa no caso da terceira questão de investigação.

No caso da vertente quantitativa, para além de uma abordagem descritiva, recorremos também a uma abordagem comparativa, adoptando um desenho experimental com um único grupo e envolvendo pré-teste e pós-teste (Gall & Gall & Borg, 2003).

O método experimental pode ser considerado um dos métodos mais rigorosos para testar hipóteses de causa-efeito. Em muitas experiências em educação emprega-se a forma de desenho clássico de uma variável. Experiências de uma variável envolvem a manipulação de uma única variável de tratamento, seguida da observação dos efeitos desta variável em uma ou mais variáveis dependentes. A variável a ser manipulada designa-se por tratamento experimental, variável independente, variável experimental ou intervenção. A variável que é medida para determinar os efeitos do tratamento experimental designa-se por pós-teste, variável dependente ou variável critério. Quando esta variável é medida antes da administração do tratamento experimental, toma o nome de pré-ensino.

Quando se faz um estudo aplicando o método experimental há que ter em atenção o facto de haver várias variáveis estranhas ao estudo que podem enviesar os resultados da experiência, sendo pois necessário estabelecer na experimentação controlos de modo que qualquer alteração no pós-teste possa ser atribuída apenas ao tratamento experimental.

No nosso estudo utilizamos apenas um grupo de alunos e envolveu três etapas: (1) administração de um teste medindo a variável dependente, antes da realização do ensino; (2) implementação do ensino de probabilidade condicionada (variável independente); (3) nova administração do teste, agora depois do ensino, para medir de novo a variável dependente. Os efeitos do ensino foram determinados comparando os scores obtidos no teste no pré-ensino com os scores obtidos no mesmo teste no pós-ensino.

Este tipo de estudo é considerado um "desenho de pré-teste pós-teste com um único grupo", e a sua utilização é justificada quando os factores estranhos podem ser estimados com um elevado grau de certeza ou pode assumir-se, com segurança, que são mínimos ou nulos. Em termos de análise estatística, pode-se recorrer a testes de qui-quadrado, a testes não paramédicos ou a testes t para amostras correlacionadas.

Na vertente qualitativa do estudo, centrada na análise do ensino desenvolvido pelas professoras, adoptou-se fundamentalmente uma abordagem descritiva, valorizando as perspectivas das professoras e a "thick description".

3.2. Participantes

O estudo foi realizado numa escola secundária da cidade de Braga, frequentada por 2100 alunos do ensino secundário. Nesta escola existem todos os cursos previstos para o ensino secundário, desde os cursos Científico-Humanísticos, Cursos Profissionais, Ensino Recorrente Nocturno, Novas Oportunidades. O Grupo de Matemática da escola é constituído por 22 professores, pertencendo 19 ao Quadro de Escola e 3 ao Quadro de Zona Pedagógica.

Para a elaboração deste estudo foi solicitada a colaboração de duas professoras do Grupo de Matemática da escola e os alunos das turmas do 12° ano dessas professoras, num total de 115 alunos pertencentes a cinco turmas.

Foi solicitado à direcção da escola a autorização para a investigação (Anexo I) e uma vez obtida a autorização, foi também pedida autorização a todos os encarregados de educação dos alunos das turmas envolvidas no estudo para registar em suporte áudio as duas aulas em que a temática seria desenvolvida, bem como para a realização do teste da investigação (Anexo I), aplicado antes e depois do ensino do tema de probabilidades condicionadas.

3.2.1. As professoras

As professoras que participaram neste estudo (Ana e Berta) são professoras efectivas desta escola e com uma larga experiência de leccionação do 12° ano.

A formação académica das professoras envolvidas neste estudo é semelhante: ambas têm uma Licenciatura em Ensino de Matemática, obtida na mesma instituição de ensino superior.

Ana tem 51 anos de idade, 29 anos de serviço, dos quais 25 nesta escola, é uma das professoras mais antigas do Grupo de Matemática e tem por hábito acompanhar os alunos ao longo de todo o ensino secundário. Inicia com os alunos no décimo ano de escolaridade e acompanha-os até ao décimo segundo ano, pelo que tem um grande conhecimento das suas capacidades.

Berta tem 45 anos de idade, 24 anos de serviço, dos quais 23 nesta escola, e é a segunda professora mais nova do Grupo de Matemática, pelo que raramente consegue acompanhar os alunos do décimo ao décimo segundo ano. Por esta razão lecciona o 12º ano frequentemente.

Ana leccionava nas turmas A, B, C do agrupamento Ciências e Tecnologias e Berta as turmas D e J, sendo a turma D também de Ciências e Tecnologias e a turma J de Ciências Socioeconómicas.

3.2.2. Os alunos

Dos 115 alunos que participaram neste estudo, 55 eram do sexo masculino e 60 do sexo feminino, a média de idades era de 17 anos e a média das classificações no 10º e 11º anos era de 12,7 valores. Verificámos ainda o facto de haver 31 alunos com classificação superior a 14 no 10º ano, sendo que três alunos obtiveram no 11º ano a classificação de 20 valores e 30 alunos uma classificação superior a 14 valores. No 12º ano verificámos também a existência de três alunos com classificação de 20 valores. Apenas 20 alunos no 11º ano e 18 alunos no 10º ano tiveram classificação inferior a 10 valores. Em termos de reprovações nos anos anteriores, verificámos que 103 alunos nunca tinham repetido nenhum ano, 10 alunos tinham repetido uma vez e 2 alunos tinham repetido duas vezes.

3.3. Método de recolha de dados

A recolha dos dados usados no estudo foi efectuada através de um teste e da observação das duas aulas em que foi leccionado o conceito de probabilidade condicionada.

Relativamente ao teste, começámos por elaborar uma primeira versão constituída por 16 questões algumas com maus do que uma alínea sobre o tema de Probabilidade Condicionada e Acontecimentos Independentes. Estas questões foram retiradas e/ou adaptadas de vários estudos.

Para se validar esta primeira versão do teste, pedimos a cinco professores de uma escola secundária que o resolvessem e verificassem se estava com um nível de dificuldade indicado para os alunos de 12º ano, e se os conteúdos correspondiam aos programados pelo currículo para os alunos deste nível. Todos os professores que analisaram o teste declararam que o seu conteúdo estava de acordo com os conteúdos programáticos do 12º ano e estava adaptado às capacidades e à faixa etária destes alunos. O único ponto menos positivo foi referenciado por uma professora na questão 9, que considerou o texto do problema um pouco "agressivo" ao referir a “probabilidade de ter cancro”. No entanto, considerando tratar-se de alunos do décimo segundo ano, também referiu que eles “não se iriam sentir chocados”.

Seguidamente, aplicámos o teste a uma turma de alunos do décimo segundo ano e controlamos o tempo que os alunos demoravam a responder ao teste, bem como as dificuldades por eles sentidas. Desta aplicação verificámos que os alunos sentiram dificuldades a explicitar os raciocínios que efectuavam para resolver as questões propostas, bem como o tempo normal da aula (90 mjnutos) foi insuficiente para a resolução do teste, tendo alguns alunos ocupado todo o intervalo e houve dois alunos que mesmo assim não conseguiram terminar. Considerando este constrangimento, reformulamos o teste tendo retirado duas questões que visavam o cálculo de probabilidades de tiragens de bolas e cujo conteúdo primário que estudavam, estavam tratados nas questões 6. Na questão, onde se verificou haver uma dificuldade de interpretação da questão, reformulou-se o texto desta de forma a não provocar equívocos.

Finalmente, tendo em atenção os resultados obtidos na aplicação do teste a este grupo de alunos, estabeleceu-se a versão definitiva do teste, que foi aplicado aos alunos que participaram no estudo (ver Anexo II).

O teste definitivo é constituído por 14 questões, algumas delas com mais do que uma alínea, e cujo conteúdo primário versa os conceitos que pretendíamos estudar e que são descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – Conteúdo primário avaliado nas alíneas das várias questões do teste

Item	Conteúdo do item
1a) e 1b)	Descrever o espaço amostral
2	Calcular uma probabilidade condicional por restrição do espaço amostral
3a) e 3b)	Calcular uma probabilidade simples e conjunta e distinguir entre acontecimentos independentes e incompatíveis
4a), 4b), 4c) e 4d)	Calcular uma probabilidade simples, conjunta e condicionada
5 a)	Calcular uma probabilidade conjunta numa experiência com reposição
5 b)	Calcular uma probabilidade conjunta numa experiência sem reposição
6 a) e 12	Calcular uma probabilidade condicionada numa experiência sem reposição
7 e 6b)	Calcular uma probabilidade condicionada quando o eixo temporal está invertido
8	Calcular uma probabilidade total
9	Calcular uma probabilidade condicionada numa situação sincrónica

10	Calcular uma probabilidade conjunta em acontecimentos independentes
11	Falácia do jogador de sorte e azar
12	Comparar a probabilidade da conjunção com a probabilidade dos seus acontecimentos constituintes (Falácia da conjunção)
13 e 14	Assimetria inferencial das causas para os efeitos e vice-versa (referência causal e diagnóstica)

Globalmente, as 14 questões do teste definitivo foram retiradas ou adaptadas de diferentes estudos, sempre tendo em conta o seu ajustamento aos objectivos do nosso estudo. Destas questões, as 10 primeiras têm o formato de questão de resposta aberta e as quatro últimas, o formato de escolha múltipla.

No caso das questões de formato de resposta aberta, elas foram retiradas/adaptadas de: as questões 1 e 2 foram estudadas por Díaz (2007); a questão 3 foi adaptada do estudo de Díaz (2007), sendo transformada de questão de escolha múltipla em questão de resposta aberta; a questão 4 foi criada por Estepa (1994) e utilizada também por Díaz (2007), consistindo numa questão cujo objectivo é a leitura de tabelas de dupla entrada envolvendo duas variáveis; a questão 5 foi adaptada de Díaz (2007), tendo sido transformada de questão de escolha múltipla em questão de resposta aberta e alterado o número de bola iniciais existentes no saco, já que na questão original o saco era constituído apenas por uma bola azul e duas bolas vermelhas e no nosso estudo a composição do saco era de duas bolas brancas e quatro bolas pretas; a questão 6 foi criada por Falk (1989) e adaptada do estudo de Díaz (2007), tendo sido transformada de questão de escolha múltipla em questão de resposta aberta; analogamente, as questões 7 e 9, retiradas dos estudos de Ojeda (1996) e de Eddy (1982), respectivamente, foram transformadas de questões de escolha múltipla em questões de resposta aberta; e as questões 8 e 10 foram retiradas do estudo de Díaz (2007), mantendo o seu formato de questão de resposta aberta.

Relativamente às quatro últimas questões de formato de escolha múltipla, elas foram retiradas de: a questão 11 foi retirada do estudo de Fernandes (1990), que a adaptou do estudo de Konold (1988); a questão 12 foi também retirada do estudo de Fernandes (1990) e criada por Tversky e Kahneman (1983), bem como a questão 14, esta criada por Tversky e Kahneman (1982) e referida nos estudos realizados por Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987); e a questão 13 foi retirada do estudo de Díaz (2007), tendo sido elaborada originariamente por Pollatsek et al. (1987).

O teste foi aplicado antes do ensino do conceito de probabilidade condicionada e imediatamente após ter terminado o seu ensino, tendo em vista estudar o impacto do ensino regular do conceito nas respostas dos alunos. As aulas leccionadas pelas professoras foram observadas pela investigadora.

A recolha dos dados foi efectuada entre o final do mês de Setembro de 2009 e o início do mês de Outubro, quando pela sequência normal da leccionação do programa de 12º ano, de acordo com a planificação do Grupo de Matemática, estava previsto o estudo do tema Probabilidades Condicionadas e Acontecimentos Independentes.

Para a aplicação do teste no pré-ensino foi disponibilizado pelas professoras titulares de Matemática da turma uma aula. Exceptuando a turma J, onde a investigadora aplicou o teste sem a presença da professora, e da turma C, em que o teste foi aplicado sem a presença da investigadora, dado que a hora da aula era coincidente com a observação da aula de outra turma, em todos as outras turmas estiveram presentes na aplicação do teste a respectiva professora de Matemática e a investigadora.

Todos os alunos iniciaram a resolução do teste simultaneamente, tendo sido pedido que registassem a hora a que terminavam a resolução. Para que se pudesse estudar o raciocínio que os alunos efectuaram na resolução dos problemas, foi solicitado aos alunos que explicitassem convenientemente os raciocínios efectuados na sua resolução. Não foram prestados aos alunos quaisquer esclarecimentos conducentes à interpretação dos problemas.

Novamente, depois de concluído o ensino do tema Probabilidade Condicionada e Acontecimentos Independentes, de novo as professoras de Matemática disponibilizaram à investigadora uma aula para os alunos resolverem de novo o teste. Este foi aplicado pela professora da turma e pela investigadora, tendo-se utilizado os mesmos procedimentos utilizados na aplicação do teste no pré-ensino. Na turma J e dado que a aula coincidia com a observação da segunda aula de outra turma, o teste foi aplicado unicamente pela professora de Matemática da turma, que utilizou exactamente os mesmos procedimentos que tinham sido utilizados durante a realização do teste no pré-ensino.

Dado que houve alunos que não estiveram presentes simultaneamente nos dois momentos de aplicação do teste, realizando apenas o teste em que estiveram presentes, eles não foram considerados no nosso estudo. Nestas circunstâncias houve 19 alunos que realizaram o teste no pré-ensino mas não no pós-ensino, distribuídos da seguinte forma: 5 alunos na turma A; 5 alunos na turma B; 3 na turma C; 2 na turma D e 4 na turma J. Também 10 alunos realizaram o teste no pós-ensino mas não pré-ensino, distribuídos da seguinte forma: 2 alunos na turma A; 3 na turma B; 2 na turma D e 3 na turma J.

Finalmente, as duas aulas que as duas professoras dedicaram ao estudo do conceito da probabilidade condicionada foram observadas pela investigadora, tendo esta efectuado o registo áudio das mesmas e elaborado notas de campo. Tratando-se de cinco turmas, a investigadora observou um total de dez aulas, cada uma com a duração de 90 minutos.

As professoras leccionaram os conteúdos programáticos aplicando a estratégia que acharam mais conveniente. Esperava-se, assim, observar aulas do ensino regular, isto é, tal como ocorrem normalmente, em o papel da investigadora era apenas de observadora, sem qualquer interferência no normal funcionamento da aula.

O facto de a investigadora ser simultaneamente professora de Matemática nessa Escola, naturalmente contribuiu para atenuar possíveis problemas derivados da observação. Mesmo assim, as duas professoras declararam que se sentiram nervosas no decorrer das aulas devido à observação. Já os alunos tiveram em todas as aulas observadas um comportamento normal, não tendo em nenhuma delas a sua actuação sido alterada pela presença da investigadora. Nas turmas C e D houve inclusive alunos que pediram ajuda à investigadora na resolução das tarefas propostas pelas professoras.

3.4. Análise de dados

Após os dados recolhidos passamos ao seu tratamento e análise no sentido de responder às questões de investigação. Para tal, começámos por analisar as respostas dos alunos em cada uma das questões do teste, bem como os raciocínios por eles usados na obtenção dessas respostas.

Relativamente às respostas dos alunos, para além das não respostas, classificámo-las em correctas e incorrectas. Seguidamente, determinámos as frequências absolutas e percentagens destes dois tipos de respostas, que resumimos em tabelas, segundo os dois momentos em que foi administrado o teste – no pré-ensino e no pós-ensino.

Ainda em relação às respostas, depois de codificadas com o valor 1 (um) as respostas correctas e com o valor 0 (zero) as respostas incorrectas, aplicámos o teste de McNemar para averiguar a existência de diferenças estatisticamente significativas do pré-ensino para o pós-ensino no tipo de resposta. Com este procedimento pretendemos estudar o impacto do ensino normal, por que tinham passado os alunos, sobre o tipo de respostas.

No caso dos raciocínios, em cada questão classificámos os raciocínios dos alunos em diferentes categorias, fundamentalmente estabelecidas *a posteriori*, sem contudo ignorar a informação disponibilizada pelos estudos em que as questões tinham sido utilizadas, quer na sua versão integral quer alterada. Nesta análise, tal como no caso das respostas, recorremos novamente a frequências absolutas e a percentagens e discriminamos os raciocínios segundo as respostas correctas e incorrectas e segundo os momentos pré-ensino e pós-ensino. A discriminação dos raciocínios segundo as respostas correctas e erradas, acompanhada da apresentação de exemplos ilustrativos dos raciocínios subjacentes às respostas, representa uma informação da maior importância em termos didácticos.

Considerámos seguidamente o número total de respostas correctas de cada aluno em todas as questões do teste nos momentos de pré-ensino e pós-ensino e aplicámos aos dados obtidos o teste t de Student para amostras emparelhadas. Considerando que a literatura revela que as situações contra-intuitivas são mais resistentes à mudança, ainda nesta parte do estudo analisámos, separadamente, as respostas dos alunos às questões contra-intuitivas (questões 6b), 7), 11), 12), 13) e 14) e às restantes questões do teste. Tal como anteriormente, considerámos também nestes dois nestes dois conjuntos de questões o número total de respostas correctas de cada aluno e aplicámos novamente o teste t de Student para amostras emparelhadas.

Por fim, estudámos a influência da variável “professora” (que tomou os valores professor A e professor B, correspondentes às duas professoras de Matemática que leccionaram os conceitos de probabilidade condicionada e independência aos alunos) no número de respostas correctas obtidas pelos alunos no teste realizado no pós-ensino. Para tal, efectuamos uma análise de co-variância (Ancova) considerando para variável dependente o número de respostas correctas dadas pelos alunos no pós-ensino, como factor as variável “professor” e como *covariate* o número de respostas correctas dadas pelos alunos no pré-ensino.

Em toda a análise estatística usou-se o programa Statistical Packedge for the Social Sciences (SPSS), versão 17 para Windows, e adoptou-se o nível de significância estatística de 0,05.

No que concerne à análise das duas aulas dadas pelas duas professoras no tema Probabilidade Condicionada e Acontecimentos Independentes, recorremos a dados resultantes das aulas gravadas em áudio e das notas de campo elaboradas pela investigadora na observação dessas aulas.

Na análise das aulas leccionadas partiu-se das notas elaboradas pela investigadora, seleccionando-se seguidamente excertos significativos das gravações áudio das aulas. A análise assumiu um carácter predominantemente descritivo e houve a preocupação de comparar as tarefas propostas pelas professoras nas aulas com as contempladas no teste, a fim de se verificar se a tipologia das tarefas do teste e os conteúdos nelas incluídos foram abordados de forma explícita ou implícita pelas professoras nas aulas.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos no nosso estudo, organizados ao longo de três secções. Na primeira secção descrevem-se os resultados obtidos pelos alunos nos testes realizados no pré-ensino e no pós-ensino, bem como se identifica, através de exemplos significativos, algumas resoluções propostas pelos alunos para os exercícios do teste quer no pré-ensino quer no pós-ensino.

Na segunda sessão, apresenta-se os resultados estatísticos que nos permite analisar a relação existente entre os resultados obtidos pelos alunos nos testes efectuados no pré-ensino e no pós ensino, utilizando os valores obtidos na análise estatística dos resultados efectuados no programa SPSS.

Na terceira secção, através das notas de campo recolhidas pela investigadora e pela análise das aulas gravadas, descrevem-se os momentos mais significativos das aulas leccionadas pelas duas professoras que colaboraram com as suas turmas nesta investigação.

4.1. Respostas e Raciocínios apresentados pelos alunos nas várias questões

4.1.1. Questão 1

> **1**. Escreve todos os resultados possíveis (espaço amostral) das seguintes experiências aleatórias:
> a) Observar o sexo (M – masculino; F – feminino) dos filhos das famílias com três descendentes. (Exemplo: MMF, ...)
> b) Observar o sexo (M – masculino; F – feminino) dos filhos das famílias com três descendentes em que dois ou mais são do sexo masculino.

Nesta questão pretendia-se que os alunos estabelecessem o espaço amostral de uma experiência aleatória. Na alínea 1a) não se introduziu qualquer restrição à experiência, pretendendo-se apenas que os alunos escrevessem todas as sequências que constituem o espaço amostral. Na questão 1b) introduziu-se uma condição que originava um conjunto mais restritivo do que o conjunto inicial. Pretendíamos saber se os alunos consideravam a restrição para criarem o novo espaço amostral constituído por parte dos elementos do conjunto definido na alínea anterior, satisfazendo à condição introduzida. Na Tabela 2 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 1.

Tabela 2 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 1

	1a)		1b)	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	34 (29,6%)	22 (19,1%)	39 (33,9%)	24 (20,9%)
Correcta	80 (69,6%)	93 (80,9%)	73 (63,5%)	91 (79,1%)
Não respondentes	0,9% (1)	—	2,6% (3)	—

Em ambas as alíneas desta questão considerámos a resposta correcta quando os alunos indicavam todos os elementos que formavam o espaço amostral.

Observando a Tabela 2, verificamos que a maioria dos alunos respondeu correctamente à questão 1a), tanto no pré como no pós-ensino. Do pré-ensino para o pós-ensino o ensino houve um aumento de 11,3% da percentagem de respostas correctas, o que corresponde a um aumento de 13 alunos.

Para estabelecer o espaço amostral, no pré-ensino, 38,3% alunos socorreram-se do diagrama de árvore e, destes, 56,4% responderam correctamente a questão; enquanto no pós-ensino a percentagem de alunos que recorreu ao diagrama de árvore aumentou para 46,1% e, destes, 49,5% responderam correctamente à questão. Na Figura 1 apresenta-se o diagrama de árvore construído pelo aluno A_{53} na resolução desta questão no pré-ensino.

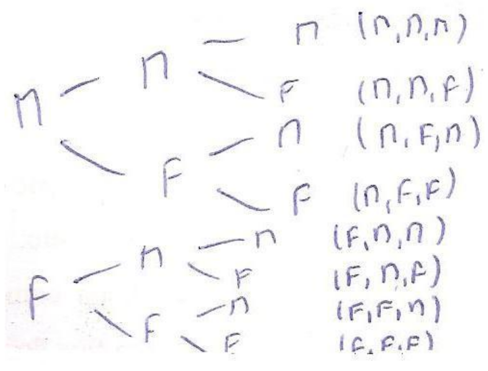


Figura 1. Resolução da questão 1a) pelo aluno A_{53} no pré-ensino.

Na alínea 1a) a resposta incorrecta resultou de os alunos indicarem apenas o número de elementos que constituíam o espaço amostral em vez de o enumerar, como se verifica na resolução da questão efectuado apresentada pelo aluno A_{71} no pré-ensino (ver Figura 2), ou de não consideravam todas as sequências constituintes do espaço amostral, como se verifica na resolução à questão apresentada pelo aluno A_{72} também no pré-ensino (ver Figura 3).

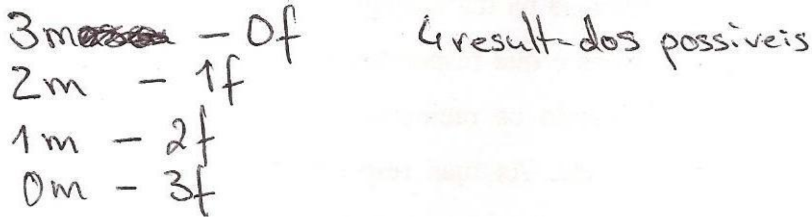


Figura 2. Resolução da questão 1a) pelo aluno A71 no pré-ensino.

No caso do primeiro tipo de erro, ele foi cometido por 7 alunos (6,1%) no pré-ensino e por 5 alunos (4,3%) no pós-ensino. Já no caso do segundo tipo de erro, ele foi mais comum, tendo sido cometido por 31 alunos (27%) no pré-ensino e por 20 alunos (17,4%) no pós-ensino.

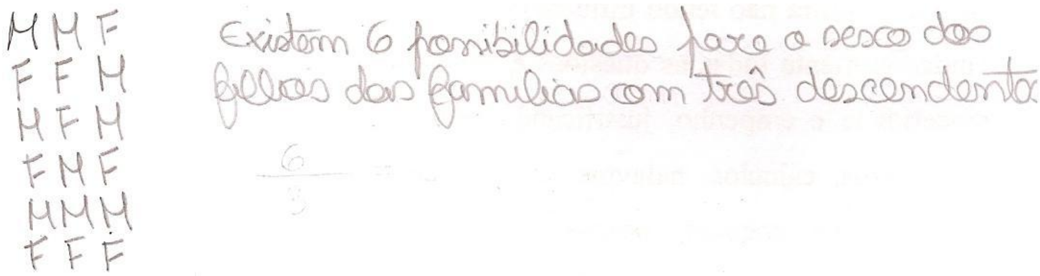


Figura 3. Resolução da questão 1a) pelo aluno A72 no pré-ensino.

Também no caso da alínea 1b) a maioria dos alunos respondeu correctamente à questão, tanto no pré como no pós-ensino, tendo-se verificado do pré-ensino para o pós-ensino o ensino houve um aumento de 15,6% da percentagem de respostas correctas, o que corresponde a um aumento de 18 alunos.

Nesta questão, constatámos que os alunos chegaram à resposta correcta procurando no espaço amostral da alínea 1a) as sequências que verificavam à condição definida, como se verificar nas Figuras 4 e 5

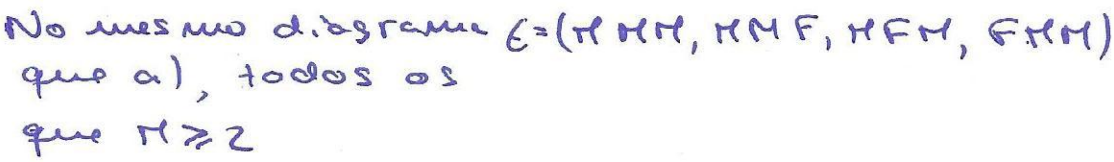
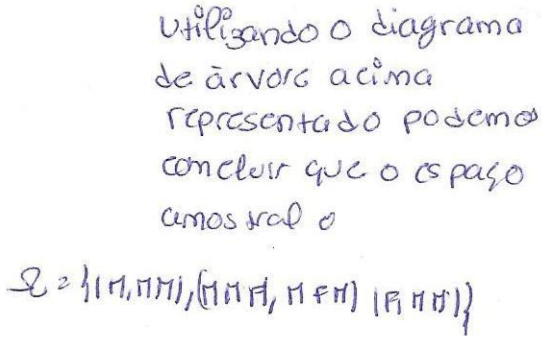


Figura 4. Resolução da questão 1b) pelo aluno A16 no pré-ensino.


Utilizando o diagrama de árvore acima representado podemos concluir que o espaço amostral é

Ω = {(M,M,M),(M,M,F), M,F,M) (F,M,M)}

Figura 5. Resolução da questão 1b) pelo aluno A_{50} no pré-ensino.

Nesta questão as respostas incorrectas resultaram da determinação do número de casos que cumpriam a condição definida sem considerar as permutações resultantes desses casos, como se verifica na resolução do aluno A_{71}, apresentada na Figura 6.

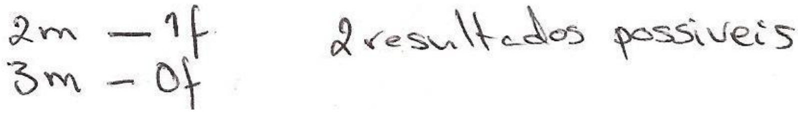
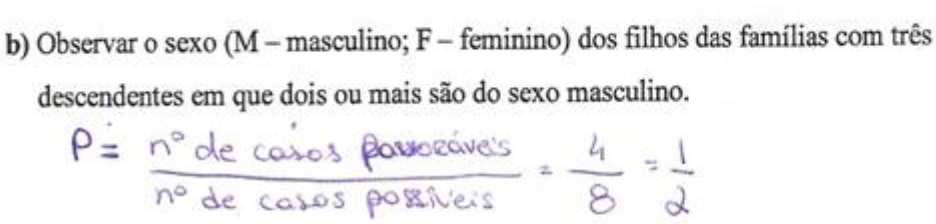

2m — 1f
3m — 0f
2 resultados possiveis

Figura 6. Resolução da questão 1b) pelo aluno A_{71} no pré-ensino.

Na resposta do aluno A_{71} constata-se que ele considerou as duas hipóteses: 2 rapazes e 1 rapariga e 3 rapazes e 0 raparigas, ignorando que a primeira hipótese dá origem a três permutações distintas. Esta resposta foi referida por 26 alunos no pré-ensino e por 17 no pós-ensino, correspondendo respectivamente a 22,6% e a 14,8% dos alunos que responderam ao questionário.

Outro tipo de resposta incorrecta resultou de os alunos calcularam a probabilidade de um casal ter pelo menos dois filhos rapazes, não descrevendo o respectivo espaço amostral, tal como também aconteceu na questão 1a). Na Figura 7 exemplifica-se o processo de obtenção deste tipo de resposta.


b) Observar o sexo (M – masculino; F – feminino) dos filhos das famílias com três descendentes em que dois ou mais são do sexo masculino.

$$P = \frac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Figura 7. Resolução da questão 1b) pelo aluno A_{46} no pós-ensino.

Este tipo de erro foi cometido por 7 alunos no pré-ensino (6,1%) e por 6 alunos (5,2%) no pós-ensino.

Tal como no caso da questão 1a), também na questão 1b) algumas respostas apresentadas pelos alunos não apresentavam todas as sequências que compõem o espaço amostral, como se verifica Figura 8.

Figura 8. Resolução da questão 1b) pelo aluno A_{72} no pré-ensino.

Este tipo de resposta errada foi mais frequente do que o anterior, tendo sido cometido por 27 alunos (23,5%) no pré-ensino e sofreu uma diminuição no pós-ensino, passando para 15 alunos (13,0%). Nestes casos verificámos que o erro cometido pelos alunos se deveu à não consideração das permutações dos elementos da sequência MMF.

4.1.2. Questão 2

2. Lançamos dois dados e sabemos que o produto dos números obtidos é 12.
Qual a probabilidade de que nenhum dos números saídos seja o 6?
(Distingue-se se um número saído é de um dado ou do outro.)

Nesta questão pretendíamos analisar os raciocínios efectuados pelos alunos para determinar o valor de uma probabilidade condicionada quando se faz uma restrição do espaço amostral. Na Tabela 3 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 3 — Respostas, em percentagem (frequência absoluta), dos alunos à questão 2

Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	80 (69,6%)	80 (69,5%)
Correcta	22 (19,1%)	27 (22,5%)
Não respondentes	13 (11,3%)	8 (7,0%)

Consideramos como resposta correcta a identificação pelos alunos da restrição do espaço amostral e a determinação correcta da probabilidade pedida, que é 1/2.

Observando a Tabela 3, verificamos que a maioria dos alunos não respondeu correctamente a esta questão. Do pré-ensino para o pós-ensino, houve apenas um aumento de 5 respostas correctas, 4,4%, devendo-se esta alteração à diminuição de alunos não respondentes, já que o número de alunos que respondeu incorrectamente à questão se manteve.

Os alunos que responderam correctamente à questão utilizaram como estratégia a construção do conjunto formado por todas as sequências de dois elementos e cujo produto era

12, estabelecendo assim o espaço amostral para a condição definida. De seguida, verificaram quais as sequências do conjunto em que nenhum dos elementos era 6. Com estes valores determinaram a probabilidade pedida, conforme pode ser verificado na Figura 9.

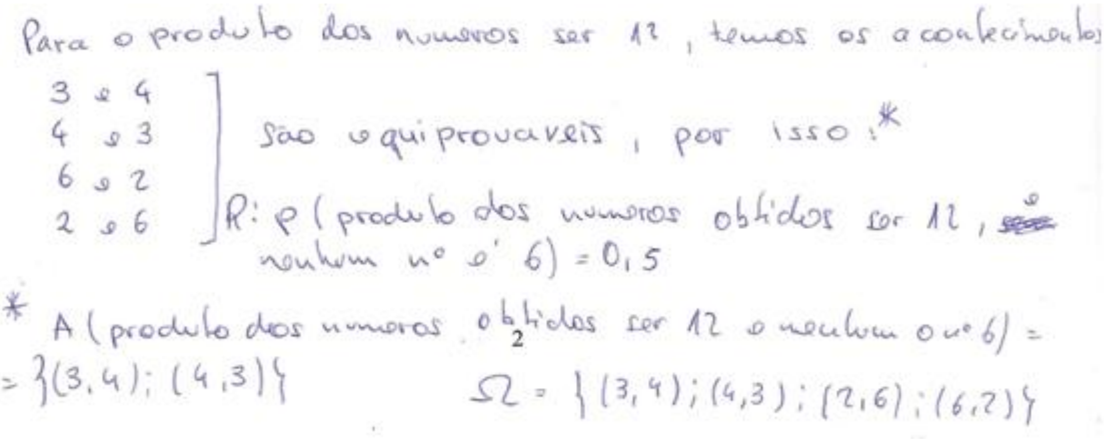


Figura 9. Resolução da questão 2) pelo aluno A47 no pré-ensino.

Das respostas incorrectas, verificamos que 29 alunos no pré-ensino (25,2%) e 21 alunos no pós-ensino (18,3%) não identificaram a condição “do produto dos números saídos ser 12” como uma restrição ao espaço amostral e concluíram que o número de casos possíveis era 36, como podemos verificar na Figura 10.

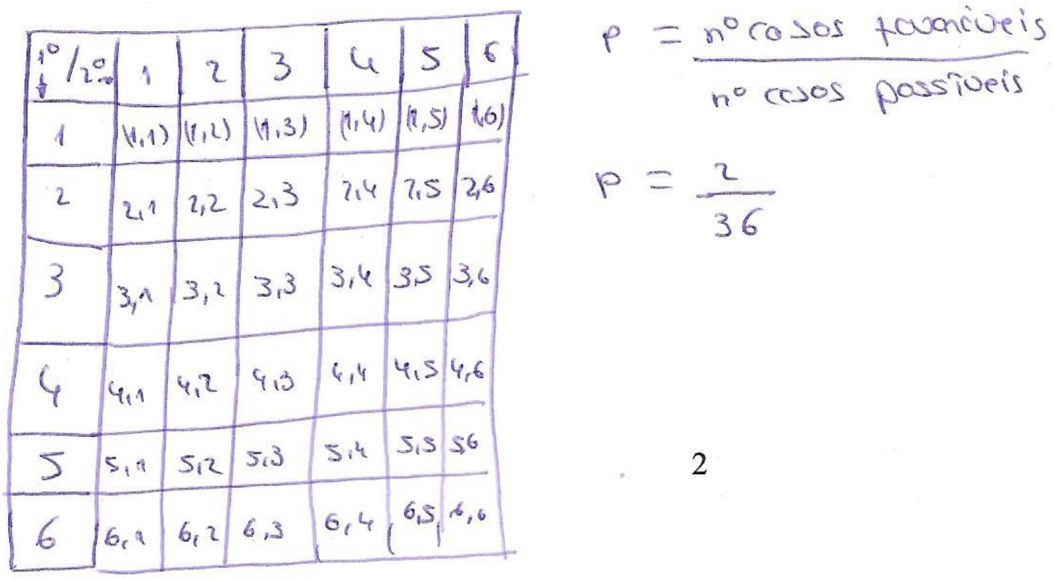


Figura 10. Resolução da questão 2) pelo aluno A52 no pré-ensino.

O outro tipo de resposta errada, apresentada por 14 alunos no pré-ensino (19,1%) e 27 alunos no pós-ensino (23,5%), resultou da interpretação errada do enunciado da questão, ao não considerarem a restrição do espaço amostral e ao concluírem que o número de casos possíveis era 12. Assim, relativamente às respostas incorrectas anteriores, estes alunos também não foram capazes de reconhecer que o espaço amostral relativo ao lançamento de dois dados é formado por 36 elementos, como se verifica na Figura 11.

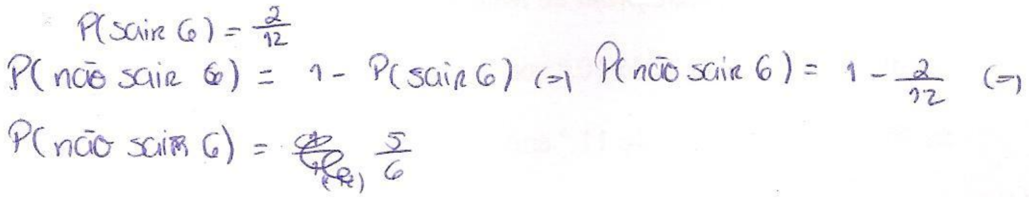


Figura 11. Resolução da questão 2) pelo aluno A_{51} no pós-ensino.

Este tipo de erro no estabelecimento do espaço amostral, considerando a soma dos seis casos relativos a cada dado, tem sido observado em outros estudos.

Verificamos ainda que 20 alunos no pré-ensino (17,4%) e 19 alunos no pós-ensino (16,5%) obtiveram o valor 0 (zero) para a probabilidade pedida, uma vez que, apesar de escreverem que se pretendia o produto 12, efectuaram os raciocínios com adições, como se verifica na Figura 12.

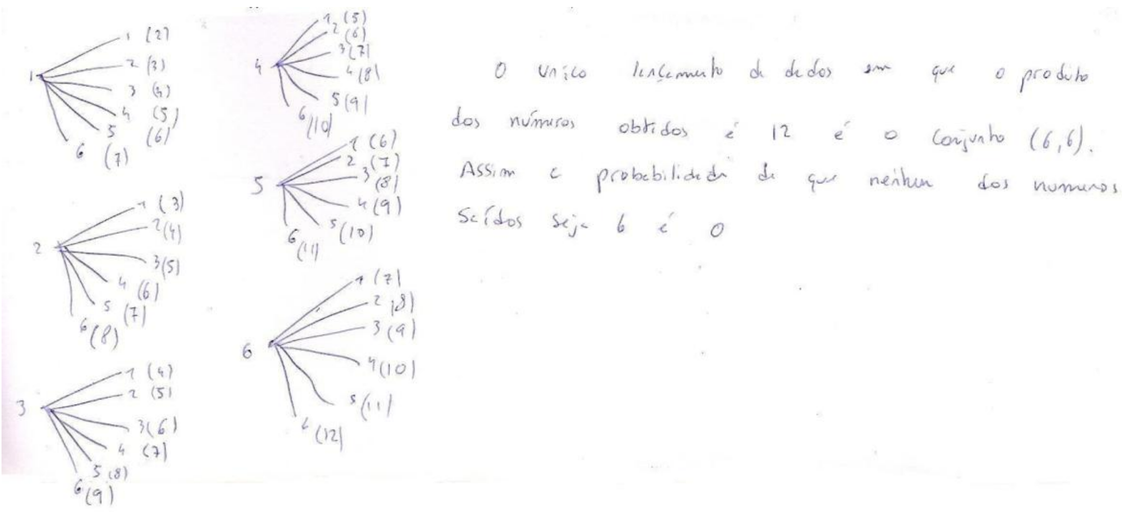


Figura 12. Resolução da questão 2) pelo aluno A_{66} no pós-ensino.

Como podemos observar o aluno colocou entre parêntesis os valores resultantes da adição dos elementos das sequências e não o produto, como se afirma no enunciado da questão "...produto dos números obtidos...", pelo que conclui que a probabilidade pedida é 0 (zero).

Verificamos ainda que 5 alunos no pré-ensino (4,3%) e 2 alunos no pós-ensino (1,7%) efectuaram o raciocínio correcto, mas não consideraram as permutações numa das sequências, pelo que obtiveram um valor errado para a probabilidade. Na Figura 13 exemplifica-se este tipo de erro.

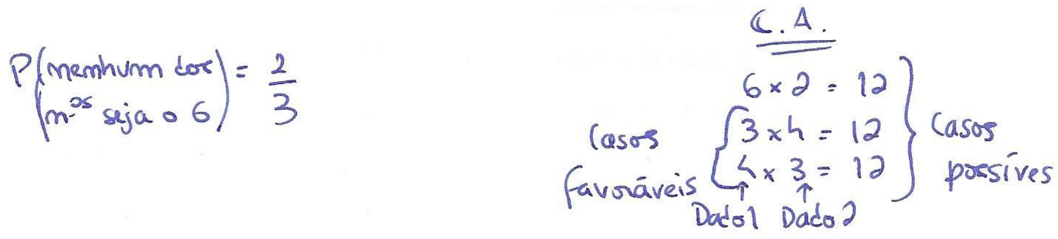


Figura 13. Resolução da questão 2) pelo aluno A95 no pré-ensino.

Como podemos observar o aluno não considerou a sequência (2, 6), pelo que conclui que os casos possíveis são apenas 3 e 2 os favoráveis.

Analisando os raciocínios incorrectos efectuados pelos alunos, verificamos ainda que 12 alunos no pré-ensino (10,4%) e 14 alunos no pós-ensino (12,2%) apresentaram como resposta à questão valores numéricos (incorrectos) sem, no entanto, apresentarem qualquer justificação.

Verificamos ainda, apenas no pós-ensino, que 6 alunos (5,2%) resolveram a questão aplicando a fórmula da probabilidade condicionada, como se pode verificar na Figura 14 .

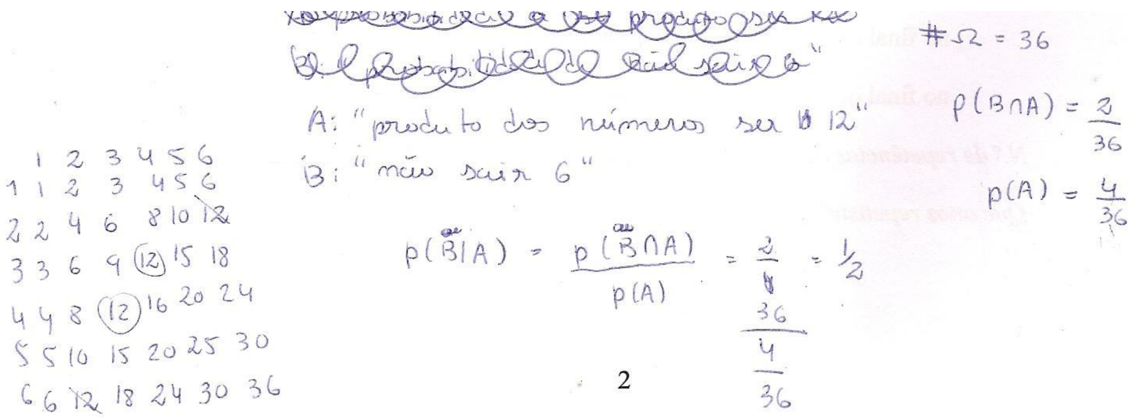


Figura 14. Resolução da questão 2) pelo aluno A26 no pós-ensino.

A adopção deste raciocínio, certamente, teve origem no ensino da probabilidade condicionada, por que entretanto os alunos passaram. No entanto, é de salientar quão poucos foram os alunos que usaram a fórmula da probabilidade condicionada. Além disso, destes alunos, apenas dois concluíram o valor correcto para a probabilidade pedida.

Analisando ainda as respostas dos alunos no pré-ensino e no pós-ensino verificamos que 71 alunos (61,7%) mantiveram uma resposta incorrecta do pré-ensino para o pós-ensino e, destes, 38 alunos (33,0%) mantiveram o mesmo tipo de erro do pré-ensino no pós-ensino.

4.1.3. Questão 3

> **3.** Extrai-se, ao acaso, um ou duas cartas de um baralho de 40 cartas com quatro naipes: ouros, espadas, paus e copas. No caso de se extraírem duas cartas, a primeira carta extraída é colocada no baralho antes de retirar a segunda. Cada naipe tem os números de 1 a 7, dama, valete e rei.
> Seja O o acontecimento "Extrair uma carta de ouros" e R o acontecimento "Extrair um Rei".
> **a)** Determina as probabilidades $P(O)$, $P(R)$ e $P(O \cap R)$.
> **b)** Existe uma relação de igualdade entre os valores de $P(O)$, $P(R)$ e $P(O \cap R)$? Qual?

Nesta questão pretendia-se que os alunos calculassem o valor de duas probabilidades simples e da probabilidade conjunta, e ainda que verificassem que o valor da probabilidade conjunta é igual ao produto dos valores das probabilidades simples, dado tratar-se de acontecimentos independentes. Na Tabela 4 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 4 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 3

	3a)		3b)	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	34 (29,6%)	19 (16,5%)	77 (67,0%)	56 (48,7%)
Correcta	80 (69,6%)	96 (83,5%)	12 (10,4%)	32 (27,8%)
Não respondentes	1 (0,8%)	—	26 (22,6%)	27 (23,5%)

Na alínea 3a) consideramos como resposta correcta o cálculo dos valores pedidos para as duas probabilidades simples e para a probabilidade conjunta e na alínea 3b) consideramos correcta a resposta em que os alunos identificaram a relação de igualdade existente entre o valor da probabilidade conjunta e os valores das probabilidades simples.

Na alínea 3a) verificamos que 80 (69,6%) e 96 (83,5%) alunos responderam correctamente à questão, respectivamente, no pré-ensino e no pós-ensino. Considerando agora cada uma das probabilidades pedidas, verificou-se que 110 (95,7%) alunos no pré-ensino e 114 (99,1%) no pós-ensino determinaram correctamente $P(O)$, 110 (95,7%) alunos no pré-ensino e 113 (98,3%) no pós-ensino determinaram correctamente $P(R)$ e 80 (69,6%) alunos no pré-ensino e 96 (83,5%) no pós-ensino determinaram correctamente $P(O \cap R)$.

Dos alunos que responderam incorrectamente, 29 (25,2%) alunos no pré-ensino e 17 alunos (14,8%) no pós-ensino calcularam correctamente o valor das probabilidades simples e erraram o cálculo da probabilidade conjunta, enquanto, apenas no pré-ensino, 2 alunos (1,7%)

erraram simultaneamente a determinação do valor de uma probabilidade simples e da probabilidade conjunta.

Dos alunos que não concluíram correctamente o valor da probabilidade conjunta, 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino utilizaram a fórmula da probabilidade da reunião de dois acontecimentos compatíveis para efectuar esse cálculo, como podemos ver na Figura 15 . Repare-se que este aluno concluiu que a probabilidade conjunta era nula não tendo criticado o resultado obtido e que o levaria à conclusão da impossibilidade do acontecimento "Sair um Rei de Ouros", que seria o acontecimento resultante da intersecção dos acontecimentos simples. Note-se ainda que o aluno utilizou os mesmos valores para obter o valor de $P(O \cap R)$ no cálculo auxiliar e para adicionar $P(O)$ com $P(R)$ na fórmula da probabilidade da reunião.

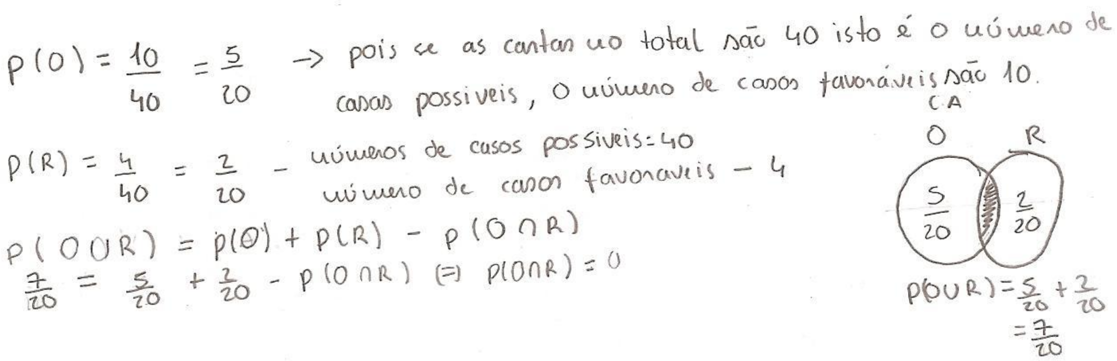


Figura 15. Resolução da questão 3a) pelo aluno A77 no pré-ensino.

No pós-ensino, dois alunos calcularam erradamente o valor da probabilidade conjunta, pois, apesar de multiplicarem os valores das probabilidades simples, efectuam este cálculo erradamente, como podemos verificar na Figura 16.

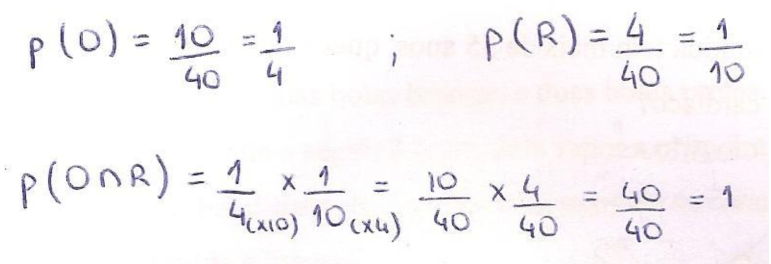


Figura 16. Resolução da questão 3a) pelo aluno A56 no pós-ensino.

Outro erro verificado apenas no pós-ensino e cometido por 3 alunos (2,6%) resultou de terem adicionado os valores das probabilidades simples para calcular o valor da probabilidade conjunta, como podemos verificar na resolução do aluno A102 no pós-ensino. Note-se, ainda, que este aluno aplicou erradamente o algoritmo da adição. Este tipo de resposta indicia falta de análise crítica por parte do aluno, pois este cálculo conduziria a um valor de $P(O \cap R)$ superior a qualquer dos valores de $P(O)$ e $P(R)$.

$P(O) = \frac{10}{40} \frac{:10}{:10} = \frac{1}{4}$

O: "Extrair carta de ouros"

R: "Extrair um rei"

$P(R) = \frac{4}{40} \frac{:4}{:4} = \frac{1}{10}$

$P(O \cap R) \Rightarrow P($extrair carta de ouros e extrair rei$) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

Figura 17. Resolução da questão 3a) pelo aluno A_{102} no pós-ensino.

A referência à utilização da fórmula da probabilidade condicionada para o cálculo do valor da probabilidade conjunta surge nas respostas de 2 alunos apenas no pós-ensino. No caso do aluno A_{115}, como se pode observar pela Figura 18, verifica-se que ele começa usar uma fórmula errada para calcular o valor de $P(R \mid O)$ e seguidamente substitui esse valor na fórmula correcta de $P(O \cap R)$.

- $P(O) = \frac{10}{40} = \frac{5}{20}$
- $P(R) = \frac{4}{40} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$P(R \mid O) = P(O) - P(R) = \frac{3}{20}$

- $P(O \cap R) = P(O)\, P(R \mid O) = \frac{5}{20} \cdot \frac{3}{20} = \frac{15}{20}$

Figura 18. Resolução da questão 3a) pelo aluno A_{115} no pós-ensino.

Na alínea 3b), podemos verificar pela Tabela 4 que 12 alunos (10,4%) responderam correctamente no pré-ensino e 31 alunos (27,0%) responderam correctamente no pós-ensino. Destes alunos, 5 (4,3%), no pós-ensino, explicitarem o facto de os acontecimentos serem independentes para afirmarem a igualdade existente entre as probabilidades simples e a probabilidade conjunta, como consta da resolução apresentada na Figura 19.

$\boxed{P(O \cap R) = P(O) \times P(R)}$

Como $P(O)$ e $P(R)$ são independentes, então $P(O) \times P(R) = P(O \cap R)$

Figura 19. Resolução da questão 3b) pelo aluno A_8 no pós-ensino.

Analisando as respostas incorrectas dadas pelos alunos, verificámos que 18 alunos (15,7%) no pré-ensino e 19 alunos (16,5%) no pós-ensino consideraram que a relação de igualdade existente entre os três acontecimentos era terem "o mesmo número de casos possíveis" e 3 alunos (2,6%) no pré-ensino e 4 alunos (3,5%) no pós-ensino consideraram que o "mesmo número de casos favoráveis" era a relação de igualdade pretendida.

A não existência de relação de igualdade entre os três valores foi mencionada por 20 alunos (17,4%) no pré-ensino e por 5 alunos no pós-ensino. Esta questão suscitou bastantes dúvidas aos alunos pois não entendiam o que se pretendia com a relação de igualdade. A este respeito, o aluno A_{42}, no pré-ensino, afirma mesmo não saber o que é uma relação de igualdade, como podemos verificar na Figura 20.

Não sei o que é uma relação de igualdade.

Figura 20. Resolução da questão 3b) pelo aluno A_{42} no pré-ensino.

A dificuldade inerente ao que é uma relação de igualdade foi manifestada por 23 alunos (20%) no pré-ensino e 14 alunos (12,2%) no pós-ensino. Assim, face a esta dificuldade, os alunos apresentaram vários tipos de respostas erradas, como é exemplificado nas Figuras 21 e 22.

A saída de um Rei.

Figura 21. Resolução da questão 3b) pelo aluno A_{61} no pré-ensino.

Sim a $P(O \cap R)$ é a junção da $P(O)$ e $P(R)$

Figura 22. Resolução da questão 3b) pelo aluno A_{86} no pós-ensino.

Muito provavelmente por influência do ensino do conceito de probabilidade condicionada, 8 alunos (7,0%) no pós-ensino consideraram que a relação pedida era de probabilidade condicionada e tentaram estabelecer uma relação através da sua fórmula, como podemos verificar na Figura 23 . Independentemente dos erros cometidos por este aluno, designadamente no que respeita a $P(R)$ e ao facto de concluir que o acontecimento $P(O \mid R)$ é um acontecimento certo, ele não se apercebeu que na utilização da fórmula aplicou a igualdade entre $P(O \cap R)$ e $P(O) \times P(R)$.

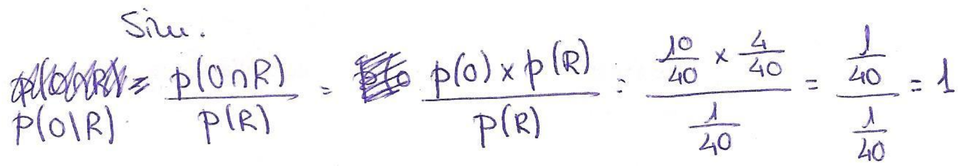


Figura 23. Resolução da questão 3a) pelo aluno A36 no pós-ensino.

4.1.4. Questão 4

4. Realizou-se uma entrevista a um grupo de homens de uma determinada população, e obtiveram-se os seguintes resultados:

	Tem menos de 55 anos	Tem mais de 55 anos	Total
Sofreu um ataque cardíaco	29	75	104
Não sofreu ataque cardíaco	401	275	676
Total	430	350	780

Se escolhermos ao acaso uma destas pessoas:

a) Qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

b) Qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um ataque cardíaco?

c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

Nesta questão, constituída por quatro alíneas, pretendia-se que os alunos diferenciassem probabilidade condicionada, simples e conjunta em dados apresentados numa tabela de dupla entrada. As respostas dadas pelos alunos a estas questões apresentam-se na Tabela 5.

Tabela 5 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 4

	4a)		4b)		4c)		4d)	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	8 (7,0%)	2 (1,7%)	28 (24,3%)	40 (34,8%)	23 (20%)	37 (32,2%)	15 (13,1%)	33 (28,7%)
Correcta	107 (93,0%)	113 (98,3%)	86 (74,8%)	74 (64,3%)	90 (78,3%)	77 (66,9%)	95 (82,6%)	80 (69,6%)
Não respondentes	—	—	1 (0,9%)	1 (0,9%)	2 (1,7%)	1 (0,9%)	5 (4,3%)	2 (1,7%)

Consideramos que as respostas dadas pelos alunos eram correctas se traduziam o valor exacto para a probabilidade pedida.

Considerando os acontecimentos *A:* ter sofrido um ataque cardíaco, *B:* ter mais de 55 anos e *C:* ter menos de 55 anos, na alínea 4a) onde se pedia para determinar o valor de uma probabilidade simples, $P(A)$, verifica-se que 109 (94,8%) dos alunos no pré-ensino e 113 (98,3%) alunos no pós-ensino respondem correctamente à questão.

No pré-ensino, 6 (5,2%) alunos não responderam correctamente à questão tendo, 3 (2,6%) alunos adicionado todos os valores constantes da coluna dos totais para calcular o valor dos casos possíveis para a probabilidade pedida, como podemos verificar na Figura 24.

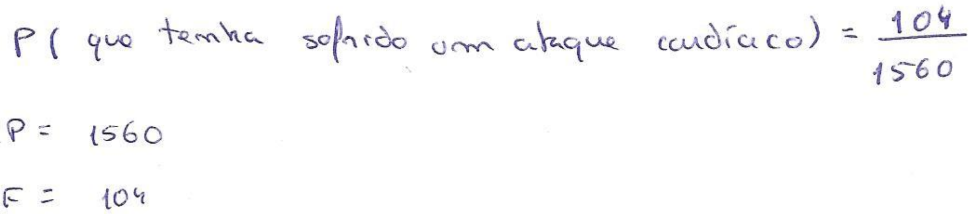


Figura 24. Resolução da questão 4a) pelo aluno A98 no pré-ensino.

A determinação incorrecta dos casos favoráveis e dos casos possíveis foi efectuada por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino, que considerou para casos possíveis o total dos homens que sofreram um ataque cardíaco e para casos favoráveis os 29 homens com menos de 55 anos, o que corresponde a determinar a probabilidade condicionada $P(C \mid A)$.

Outro erro, agora cometido por 2 (1.7%) alunos no pré-ensino foi considerar a probabilidade pedida como a soma das probabilidades de um homem ter menos de 55 anos e ter mais de 55 anos, sabendo em ambos os casos que sofreu um ataque cardíaco, como podemos verificar na Figura 25. Note-se, ainda, que este aluno aplicou erradamente o algoritmo da adição.

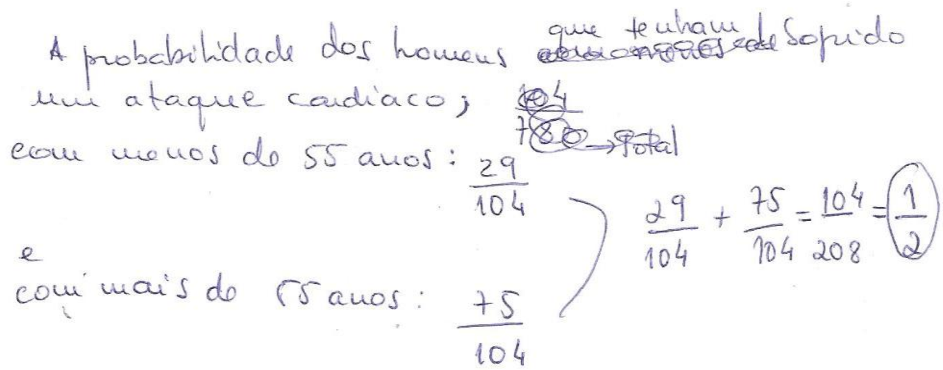


Figura 25. Resolução da questão 4a) pelo aluno A104 no pré-ensino.

No pós-ensino, apenas 2 (1,7%) alunos responderam incorrectamente a esta questão, tendo um aluno considerado como casos favoráveis o total de pessoas com menos de 55 anos e o outro aluno não utilizou a Lei de Laplace para o cálculo da probabilidade pedida, confundindo probabilidade com frequência absoluta, como podemos verificar na Figura 26. Na resolução apresentada, o aluno A_{110} mostra falta de análise crítica, pois obtém para o valor da probabilidade um valor muito superior a 1 e aceita-o sem qualquer alusão a esse facto.

P (sofrer um ataque cardíaco) = 104

Figura 26. Resolução da questão 4a) pelo aluno A_{110} no pós-ensino.

Na alínea 4b), onde se pedia para determinar o valor de uma probabilidade conjunta, $P(A \cap B)$, verifica-se que 86 (74,8%) dos alunos no pré-ensino e 75 (65,2%) dos alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão.

É de salientar a diminuição de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino. Esta situação é verificada também nas alíneas seguintes, onde se pedia o valor de uma probabilidade condicionada. Considerando que, entre estes dois momentos, o conceito de probabilidade condicionada foi leccionado aos alunos nas aulas de Matemática, esta diminuição de respostas correctas pode dever-se à grande acessibilidade do novo conceito, a uma aquisição superficial do conceito e a descurar-se uma análise cuidada da questão.

Dos alunos que responderam incorrectamente à questão, 18 (15,7%) alunos no pré-ensino e 17 (14,8%) alunos no pós-ensino consideraram erradamente o número de casos possíveis: 11 (9,6%) alunos no pré-ensino e 16 (13,9%) alunos no pós-ensino consideraram como casos possíveis o total de pessoas que sofreram um ataque cardíaco e 7 (6,1%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino consideraram para casos possíveis o total de pessoas com mais de 55 anos (figuras 27 e 28). Note-se na resolução do último aluno a preocupação de sublinhar os acontecimentos que vão formar o acontecimento conjunto cuja probabilidade é pedida.

P(que tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um ataque cardíaco) =

$= \frac{75}{104}$

Figura 27. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{96} no pós-ensino.

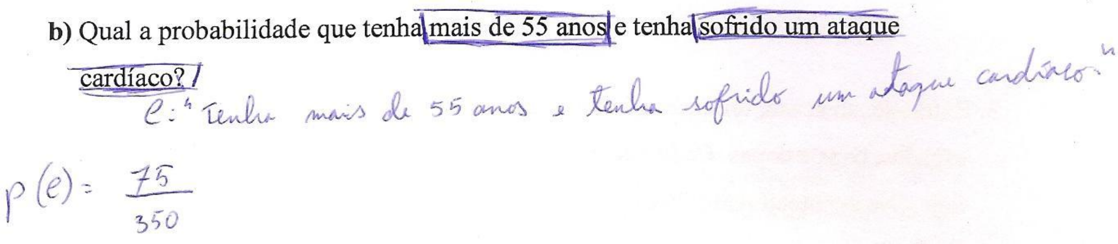


Figura 28. Resolução da questão 4b) pelo aluno A42 no pré-ensino.

Outra incorrecção no cálculo dos casos possíveis resultou da adição de todos os valores da coluna dos totais, pelo que obtiveram o número de 1560 de casos possíveis. Este erro foi cometido por 2 (1,7%) alunos no pré ensino.

Ainda 2 (1,7%) alunos, no pós-ensino, apresentaram como casos favoráveis todas as pessoas que sofreram um ataque cardíaco e como casos possíveis, todos o que tinham menos de 55 anos. No caso do aluno A68 (ver Figura 29), no pós-ensino, embora tenha referido as pessoas de mais de 55 anos, usou no cálculo da probabilidade o número de pessoas de menos de 55 anos.

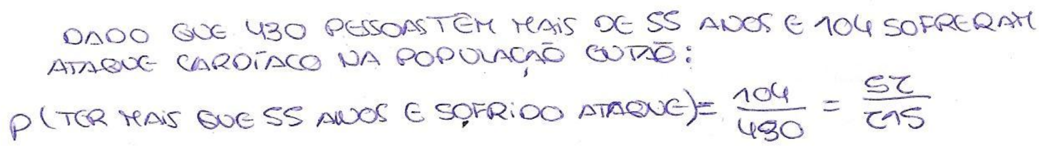


Figura 29. Resolução da questão 4b) pelo aluno A68 no pós-ensino.

Outro erro também cometido por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) alunos no pós-ensino resultou de terem efectuado o produto das probabilidades, supondo a independência dos acontecimentos, como se verifica na Figura 30.

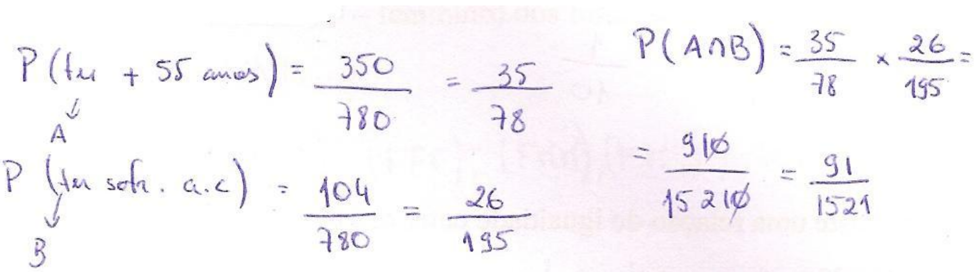


Figura30. Resolução da questão 4b) pelo aluno A58 no pré-ensino.

Resolução análoga a esta foi ainda proposta por 1 (0.9%) aluno no pós-ensino, tendo considerado, no entanto, o acontecimento contrário do acontecimento B. A resolução deste aluno, é apresentada na Figura 31. Na sua resolução, o aluno usou a probabilidade do acontecimento *A*, que tinha calculado na alínea anterior, e considerou *B* o acontecimento "ter menos de 55 anos".

$$P(\bar{B} \cap A) = P(\bar{B}) \times P(A) = \frac{35}{78} \times \frac{2}{15} = \frac{7}{117}$$

$$P(B) = \frac{430}{780} = \frac{43}{78}$$

$$P(A) = 2/15$$

$$1 - \frac{43}{78} = P(\bar{B}) = \frac{35}{78}$$

Figura31. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{13} no pós-ensino.

No pré-ensino, 3 (2,6%) alunos consideraram os acontecimentos simples mutuamente exclusivos e adicionaram os valores das probabilidades simples. Note-se ainda que estes alunos confundiram ainda a conjunção com a união de acontecimentos, como podemos verificar na Figura 32.

$$A: P(\text{ataque cardiaco e/ mais de 55 anos}) = \frac{75}{350} = \frac{3}{14}$$

$$B: P(\text{mais de 55 anos}) = \frac{350}{780} = \frac{35}{78}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{14} + \frac{35}{78} = \frac{181}{273} = 66{,}3\%$$

Figura32. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{106} no pré-ensino.

Ainda nesta alínea, outro erro cometido por 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) no pós-ensino foi resultado da confusão da coluna onde foram obter os valores dos casos favoráveis, tendo os 2 alunos no pré-ensino considerado para casos favoráveis as 29 pessoas que têm menos de 55 anos e sofreram um ataque cardíaco e 1 aluno no pós-ensino considerou para casos favoráveis as 275 pessoas que têm mais de 55 anos e não sofreram um ataque cardíaco.

Apenas no pós-ensino, 11 (9,6%) alunos confundiram a probabilidade conjunta com a probabilidade condicionada e apresentaram o valor da probabilidade de "ter um ataque cardíaco, sabendo que tem mais de 55 anos", obtendo como resposta para a probabilidade pedida o valor de $\frac{75}{350}$, como se exemplifica na Figura 33.

Figura33. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{103} no pós-ensino.

A razão inversa da Lei de Laplace foi usada por 1 (0,9%) aluno, no pós-ensino, que obteve para a probabilidade pedida um valor superior à unidade. Este valor foi aceite pelo aluno sem qualquer reparo, como podemos verificar na Figura 34. Note-se ainda, que este aluno, considerou a soma das 350 pessoas com mais de 55 anos com as 104 pessoas que sofreram um ataque cardíaco para obter o valor de 454 proposto para casos favoráveis.

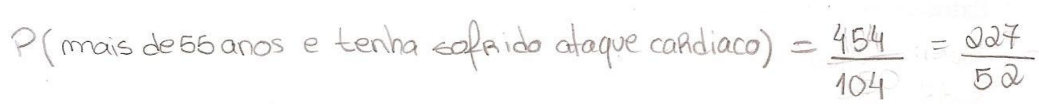
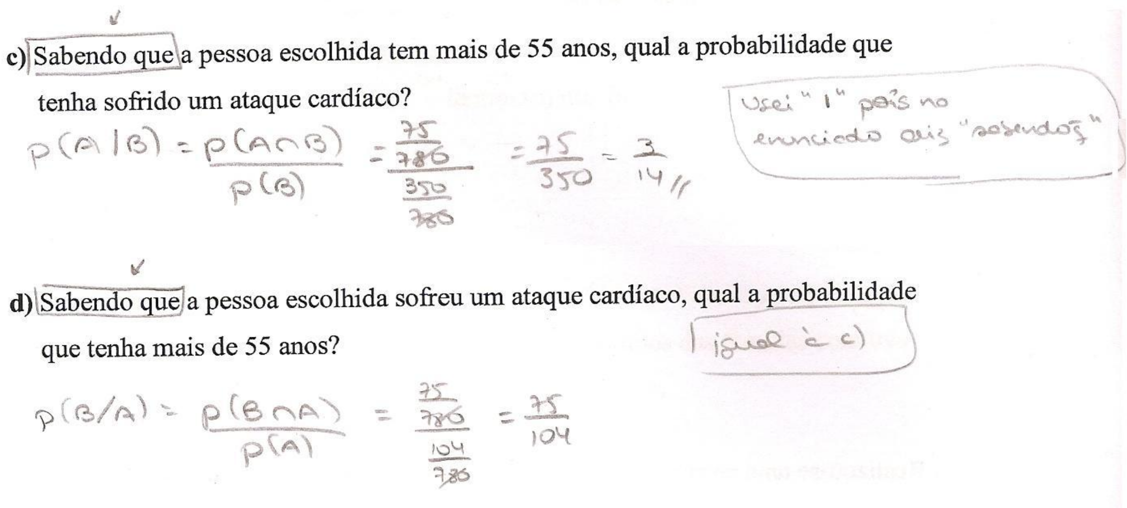


Figura 34. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{78} no pós-ensino.

Nas alíneas 4c) e 4d) pediam-se valores de probabilidades condicionadas $P(A \mid B)$ $P(B \mid A)$. Como podemos verificar na Tabela 5, 90 (78,3%) alunos no pré-ensino e 77 (67,0%) alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão 4c), enquanto que a questão da alínea 4d) foi correctamente respondida por 96 (83,5%) alunos no pré-ensino e 80 (69,6%) alunos no pós-ensino.

Tal como na alínea anterior, verificamos também nestas duas alíneas uma diminuição do número de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino. Este facto, como já foi mencionado antes, pode dever-se ao facto de os alunos no pós-ensino terem utilizado a fórmula da probabilidade condicionada para a resolução destas questões, e na qual sentiram dificuldades. Na alínea 4c), 30 (26,1%) alunos utilizaram correctamente a fórmula, mas 21 (18,3%) alunos utilizaram-na incorrectamente. Analogamente, na alínea 4d), 32 (27,9%) alunos utilizaram correctamente a fórmula, exemplificam mas 15 (13,0%) alunos utilizaram-na. As resoluções apresentadas nas Figuras 35 e 36, exemplificam o cálculo da probabilidade condicionada, onde são notórias as dificuldades dos alunos em seleccionarem os dados adequados e/ou em efectuarem correctamente os cálculos. Mais uma vez, no caso do aluno A_{52}, a obtenção de um valor da probabilidade superior a 1 não o leva a reconsiderar a sua resolução, aceitando esse valor impossível sem que seja visível qualquer sentido crítico.



c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{75}{780}}{\frac{350}{780}} = \frac{75}{350} = \frac{3}{14}$$

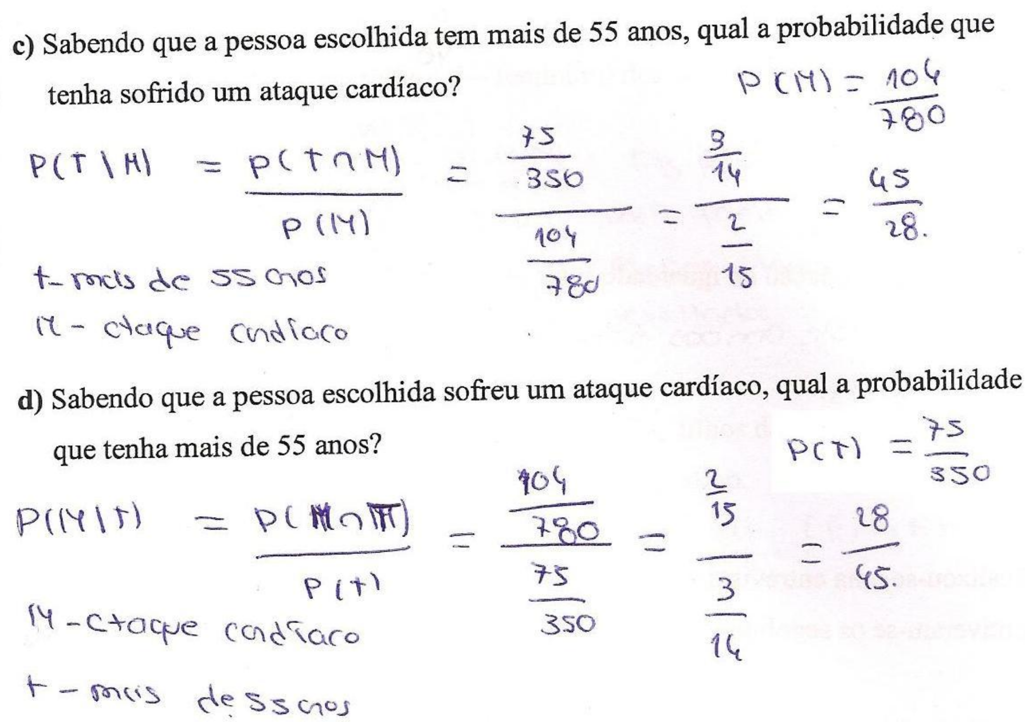
Usei "|" pois no enunciado diz "sabendo"

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

$$p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{75}{780}}{\frac{104}{780}} = \frac{75}{104}$$

igual à c)

Figura 35. Resolução das questões 4c) e 4d) pelo aluno A_{48} no pós-ensino.



c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

$$P(M) = \frac{104}{780}$$

$$P(T|M) = \frac{P(T\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{75}{350}}{\frac{104}{780}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{2}{15}} = \frac{45}{28}.$$

T- mais de 55 anos

M - ataque cardíaco

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

$$P(T) = \frac{75}{350}$$

$$P(M|T) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{104}{780}}{\frac{75}{350}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{14}} = \frac{28}{45}.$$

M - ataque cardíaco

T - mais de 55 anos

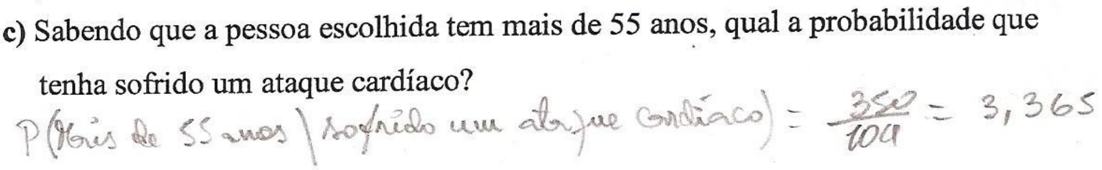
Figura 36. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{52} no pós-ensino.

Das outras respostas incorrectas, verificou-se que 3 (2,6%) alunos no pós-ensino determinaram correctamente os casos possíveis mas não identificaram correctamente os casos favoráveis, na alínea 4c), enquanto na alínea 4d) este erro foi cometido por 2 (1,7%) alunos apenas no pré-ensino.

Determinar correctamente os casos favoráveis e incorrectamente os casos possíveis, foi efectuado por 11 (9,6%) alunos no pré-ensino e por 6 (5,2%) alunos no pós-ensino, na alínea 4c), e por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e por 4 (3,5%) alunos no pós-ensino, na alínea 4d).

Determinar incorrectamente os casos possíveis e os casos favoráveis, foi efectuado por 8 (7,0%) alunos no pré-ensino e por 2 (1,7%) alunos no pós-ensino, na alínea 4c), e por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e por 11 (9,6%) alunos no pós-ensino, na questão 4d).

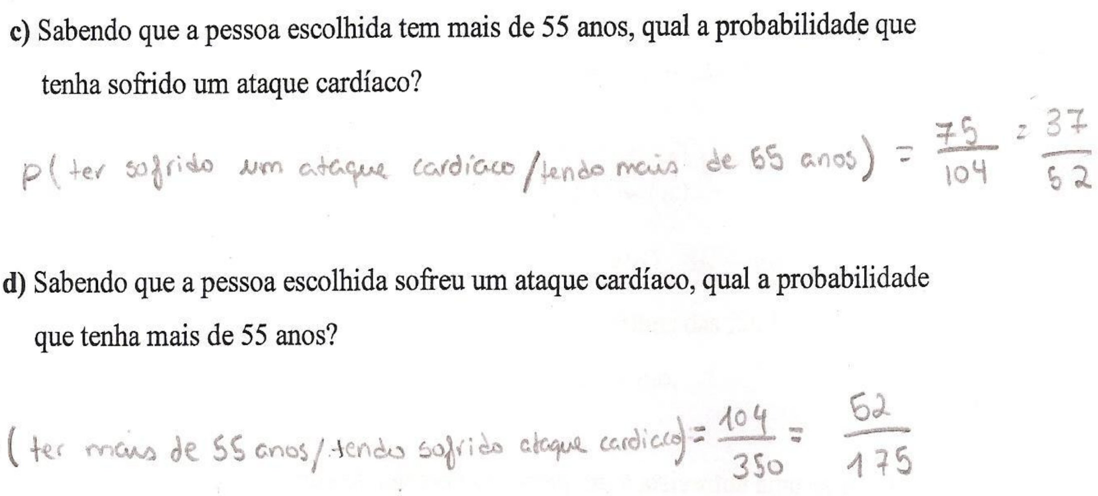
Outro erro comum às duas alíneas e efectuado por 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e por 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, na alínea 4c), e por 6 (5,2%) alunos apenas no pré-ensino, na alínea 4d), foi a atribuição de um valor maior do que a unidade à probabilidade pedida, não se observando qualquer análise crítica para o valor encontrado, como se verifica na Figura 37. Além disso, este aluno estabeleceu erradamente a probabilidade pretendida, trocando a ordem dos acontecimentos, bem como o cálculo subsequente.


c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

P(Mais de 55 anos | sofrido um ataque cardíaco) = $\frac{350}{104}$ = 3,365

Figura 37. Resolução da questão 4b) pelo aluno A_5 no pós-ensino.

A inversão da probabilidade condicionada, conduzindo portanto valores incorrectos para as probabilidades pedidas, foi efectuada por 5 (4,3%) alunos no pré-ensino e 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, na alínea 4c), e por 1 (0,9%) aluno apenas no pré-ensino, na questão 4d). Este erro pode ser verificado na Figura 38, onde o aluno traduz correctamente a probabilidade condicionada pedida, mas usa os valores de cálculo da probabilidade condicionada inversa. É de notar ainda que na questão 4d) o aluno conclui incorrectamente o número de casos favoráveis uma vez que apresenta para estes o total de pessoas sofreram um ataque cardíaco.


c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

p(ter sofrido um ataque cardiaco / tendo mais de 65 anos) = $\frac{75}{104}$ = $\frac{37}{52}$

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

p(ter mais de 55 anos / tendo sofrido ataque cardiaco) = $\frac{104}{350}$ = $\frac{52}{175}$

Figura 38 Resolução da questão 4b) pelo aluno A_{57} no pós-ensino.

Todos os erros efectuados pelos alunos estão descritos na literatura revista e enfatizam a necessidade de atender à capacidade de leitura de dados em tabelas de dupla entrada.

4.1.5. Questão 5

5. Num saco há três bolas brancas e quatro bolas pretas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.
a) Supondo que a 1.ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2.ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.
b) Supondo que a 1.ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2.ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

Nesta questão pretendia-se que os alunos determinassem uma probabilidade conjunta em dois tipos de experiências: na alínea a) a experiência é feita com reposição da bola extraída na primeira tiragem, enquanto na alínea b) a experiência é feita sem reposição da bola extraída na primeira tiragem. No caso da alínea b), trata-se de uma situação de probabilidade condicional por restrição do espaço amostral. Na Tabela 6 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 5.

Tabela 6 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 5

	5a)		5b)	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	48 (41,7%)	46 (40,0%)	48 (41,7%)	41 (35,6%)
Correcta	64 (55,7%)	66 (57,4%)	61 (53,1%)	70 (60,9%)
Não respondentes	3 (2,6%)	3 (2,6%)	6 (5,2%)	4 (3,5%)

Nas duas alíneas desta questão consideramos correcta a resposta, quando os alunos indicavam o valor exacto da probabilidade pedida.

Observando a Tabela 6 verificamos que 64 (55,7%) alunos no pré-ensino e 66 (57,4%) alunos no pós-ensino responderam correctamente à alínea a) desta questão. Do pré-ensino para o pós-ensino houve apenas um aumento de 1,7% de alunos que respondeu correctamente à questão, o que corresponde a um aumento de 2 alunos.

Quanto à alínea b), verificamos que 61 (53,1%) alunos no pré-ensino e 70 (60,9%) alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão, havendo neste caso um aumento de 9 (7,8%) alunos do pré-ensino para o pós-ensino.

Para responder correctamente às questões, verificamos que todos os alunos no pré-ensino e no pós-ensino recorreram à regra do produto para as resolver, apesar de 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e 8 (7,0%) alunos no pós-ensino, na alínea a), e 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 8 (7,0%) no pós-ensino, na alínea b), terem efectuado um diagrama de árvore para esquematizar as probabilidades simples envolvidas no problema, como se exemplifica nas Figuras 39 e 40. Nesta podemos observar que o aluno resolve as alíneas a) e b), recorrendo à regra do produto para determinar a probabilidade pedida.

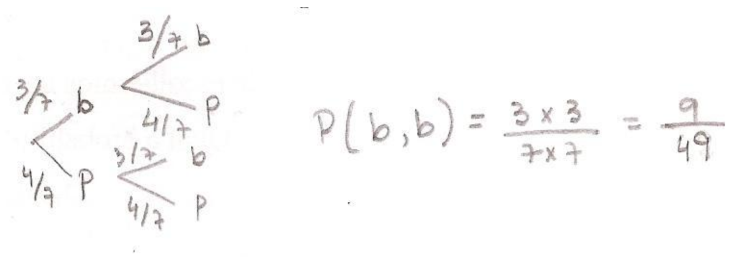


Figura 39. Resolução da questão 5a) pelo aluno A_{52} no pós-ensino.

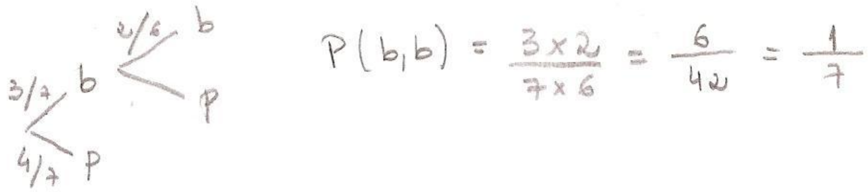


Figura 40. Resolução da questão 5b) pelo aluno A_{52} no pós-ensino.

Verificamos ainda que, na alínea a), 1 (0,9%) aluno no pré-ensino utilizou uma tabela de dupla entrada para descrever todas as sequências de resultados possíveis, utilizando de seguida a regra do produto para calcular o valor da probabilidade pedida, como podemos verificar na Figura 41.

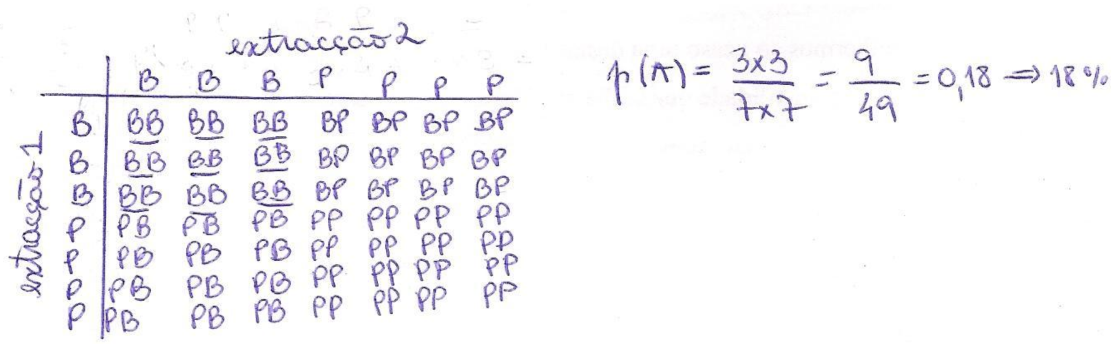


Figura 41. Resolução da questão 5a) pelo aluno A_{28} no pré-ensino.

Das respostas incorrectas dadas pelos alunos a estas questões, salientou-se que 18 (15,6%) alunos no pré-ensino e 17 (14,8%) alunos no pós-ensino, caso da alínea a), e 10 (8,7%) alunos no pré-ensino e 7 (6,1%) alunos no pós-ensino, no caso da alínea b), não considerarem a probabilidade pedida como a conjunção de dois acontecimentos simples, respondendo como se fosse pedida a probabilidade de um acontecimento simples, como é exemplificado na Figura 42.

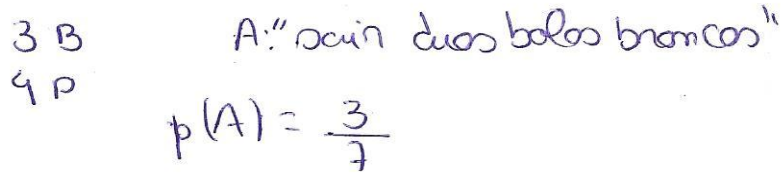


Figura 42. Resolução da questão 5a) pelo aluno A_{55} no pós-ensino.

Verificamos, também, que 8 (7,0%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) alunos no pós-ensino, na alínea a), e 13 (11,3%) alunos no pré-ensino e 8 (7,0%) alunos no pós-ensino, na alínea b), efectuaram a adição dos valores das probabilidades simples para determinarem o valor da probabilidade da conjunção, apesar de considerarem correctamente a reposição na alínea a) e a não reposição na alínea b), como podemos verificar nas Figuras 43 e 44.

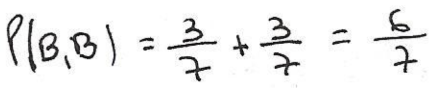


Figura 43. Resolução da questão 5a) pelo aluno A_{100} no pós-ensino.

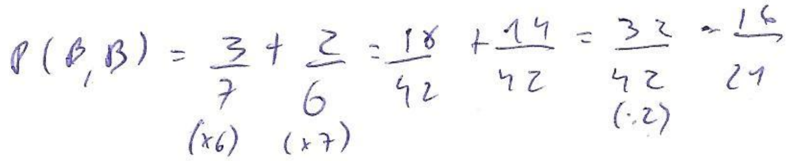
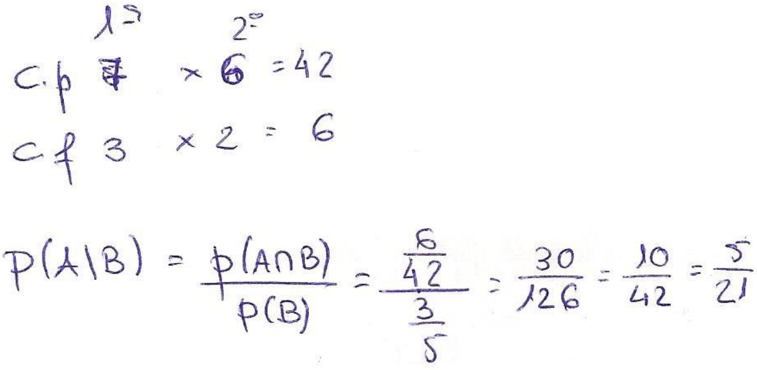


Figura 44. Resolução da questão 5b) pelo aluno A_{11} no pré-ensino.

Nas respostas incorrectas dadas pelos alunos a estas questões salientam-se ainda 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, na alínea a), e 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) no pós-ensino, na alínea b), que determinaram correctamente apenas o número de casos possíveis. Também 4 (3,5%) alunos no pré-ensino e 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, na alínea a), e 7 (6,1%) alunos no pré-ensino e no pós-ensino, na aliena b), determinaram correctamente apenas o número de casos favoráveis.

Não considerar a não reposição da bola na segunda tiragem foi um erro cometido por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, apenas na alínea a).

Verificamos ainda que 3 (2,6%) alunos na alínea a) e 2 (1,7%) alunos na alínea b) utilizaram, no pós-ensino, a fórmula da probabilidade condicionada para resolver a questão, como se pode verificar na Figura 45.


1º 2º

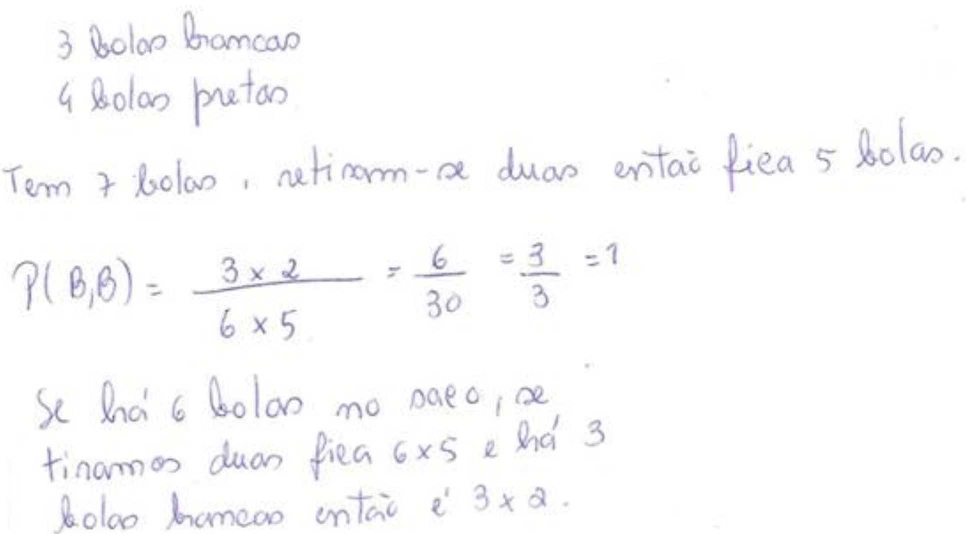
C.p 7 × 6 = 42

C.f 3 × 2 = 6

$$P(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{6}{42}}{\frac{3}{5}} = \frac{30}{126} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

Figura 45. Resolução da questão 5b) pelo aluno A36 no pós-ensino.

Uma incorrecta interpretação do enunciado parece ter conduzido 14 (12,2%) alunos no pré-ensino e 13 (11,3%) alunos no pós-ensino, no caso da alínea a), bem como 16 (13,9%) alunos no pré-ensino e 11 (9,6%) alunos no pós-ensino, no caso da alínea b), a resultados errados, como podemos verificar na Figura 46.


3 bolas brancas

4 bolas pretas

Tem 7 bolas, retiram-se duas então fica 5 bolas.

$$P(B,B) = \frac{3\times 2}{6\times 5} = \frac{6}{30} = \frac{3}{3} = 1$$

Se há 6 bolas no saco, se tiramos duas fica 6×5 e há 3 bolas brancas então é 3×2.

Figura 46. Resolução da questão 5a) pelo aluno A43 no pós-ensino.

É de salientar na resolução deste aluno que, além de não ter identificado correctamente o número de bolas iniciais existentes no saco, não teve em conta a reposição da bola para a segunda tiragem. Este erro, na resolução desta alínea, foi cometido por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e por mais 2 (2,6%) alunos no pós-ensino.

4.1.6. Questão 6

> **6.** Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.
> **a)** Qual a probabilidade da segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca?
> **b)** Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?

Com esta questão pretendia-se que os alunos determinassem a probabilidade condicionada numa experiência sem reposição, em que os acontecimentos surgem numa sequência temporal natural, no caso da alínea a), e quando se inverte a sequência temporal com que os acontecimentos ocorrem, no caso da alínea b). Pretendíamos saber se os alunos consideravam ou não que a probabilidade de um acontecimento pode ser afectado por outro acontecimento realizado antes ou depois do primeiro, contrariamente ao que acontece no determinismo, em que as causas precedem sempre os efeitos. Na Tabela 7 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 6.

Tabela 7 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 6

	6a)		6b)	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	44 (38,3%)	43 (37,4%)	94 (81,7%)	83 (72,2%)
Correcta	68 (59,1%)	70 (60,9%)	12 (10,4%)	23 (20,0%)
Não respondentes	3 (2,6%)	2 (1,7%)	9 (7,8%)	9 (7,8%)

Consideramos correctas as respostas a estas questões quando os alunos indicavam o valor correcto da probabilidade pedida.

Observando a Tabela, verificamos que na alínea a), em que os acontecimentos que intervinham na probabilidade pedida estavam sequenciados de uma forma natural, a maioria dos alunos respondeu correctamente à questão, tendo apenas havido mais 1 aluno a responder correctamente entre o pré-ensino e o pós-ensino, o que corresponde a um aumento percentual de apenas 0,9%. Verificamos ainda que para responder correctamente à questão, no pré-ensino, 51 (44,3%) alunos apresentaram o resultado sem referirem qualquer justificação para o valor, 7 (6,1%) alunos elaboraram um diagrama de árvore e 10 (8,7%) alunos deram uma justificação por escrito do valor encontrado, como se pode verificar nas 47 e 48.

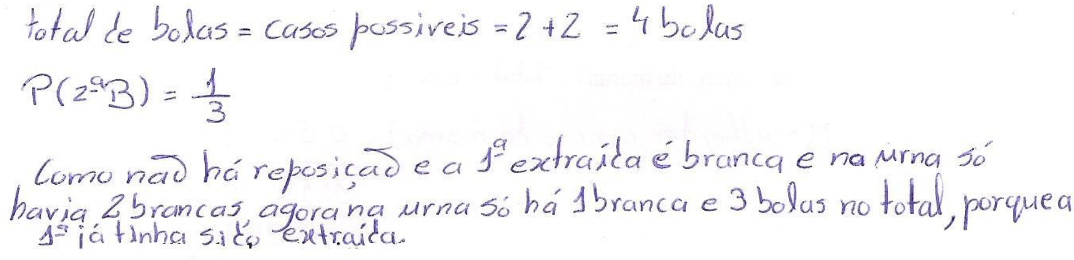


Figura 47. Resolução da questão 6a) pelo aluno A_{27} no pré-ensino.

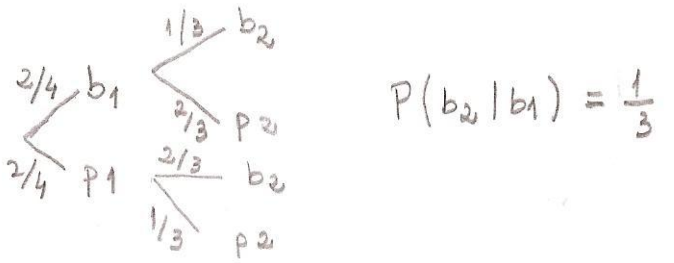


Figura 48. Resolução da questão 6a) pelo aluno A_{66} no pós-ensino.

Verificamos ainda que, no pré-ensino, nenhum aluno resolveu esta questão aplicando a fórmula da probabilidade condicionada, enquanto no, pós-ensino, ela foi aplicada correctamente por 17 (14,8%) alunos e incorrectamente por 16 (13,9%) alunos, como se exemplifica nas Figuras 49 e 50.

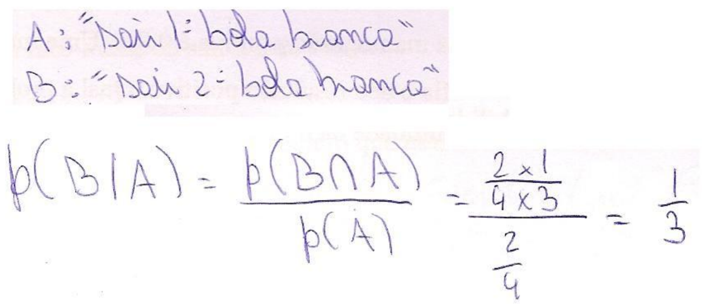


Figura 49. Resolução da questão 6a) pelo aluno A_{29} no pós-ensino.

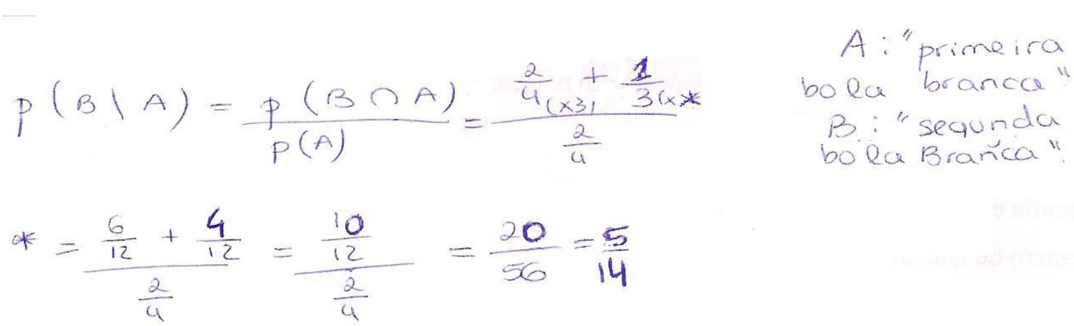


Figura 50. Resolução da questão 6a) pelo aluno A_{37} no pós-ensino.

É de notar na resolução do aluno A37 que o seu erro resultou do facto de ter adicionado as probabilidades simples para obter a probabilidade da conjunção dos dois acontecimentos, em vez de efectuar o produto das probabilidades.

Das respostas incorrectas dadas pelos alunos a esta questão salienta-se ainda que 22 (19,1%) alunos no pré-ensino e 15 (13,1%) alunos no pós-ensino efectuaram o produto das probabilidades simples, obtendo, assim, o valor da probabilidade da conjunção dos acontecimentos (independentes) em vez do valor da probabilidade condicionada pedida, como se exemplifica na Figura 51.

$$p(2^{\underline{a}} \text{ bola extraída ser branca}) = \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade de a bola extraída ser branca é $\frac{1}{6}$.

Figura 51 Resolução da questão 6a) pelo aluno A60 no pós-ensino.

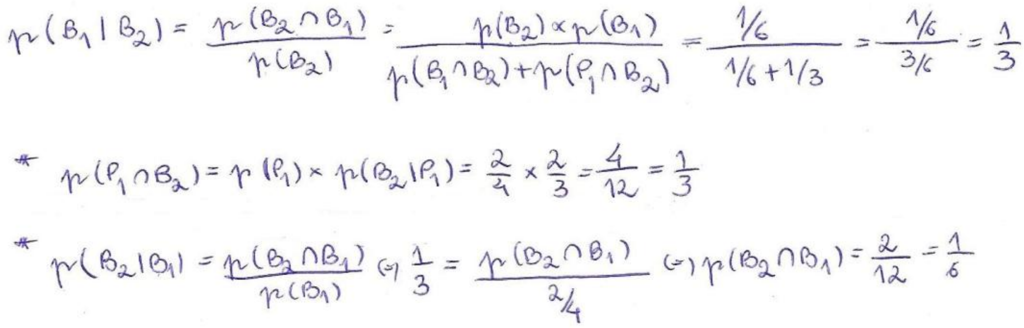
Outros tipos de erros cometidos pelos alunos no cálculo da probabilidade condicionada pedida resultaram de considerar apenas a primeira tiragem de bola branca, que foi efectuado por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e por 2 (1,7%) alunos no pós-ensino; adicionar os valores das probabilidades simples, que foram efectuados por 1 (0,9%) aluno no pós-ensino; confundir a probabilidade condicionada com a divisão das probabilidades, que foi efectuada por 3 (2,6%) alunos no pós-ensino como se exemplifica na Figura 52.

$$p(2^{a} \text{ ser } b \mid 1^{a} \text{ é } b) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Figura 52. Resolução da questão 6a) pelo aluno A20 no pós-ensino.

Na alínea b), em que a probabilidade condicionada corresponde à inversão do eixo temporal, verificamos que apenas 12 (10,4%) alunos no pré-ensino e 23 (20,0%) alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão, salientando-se um aumento de 8,7%, correspondente a 10 alunos, de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino. Verificamos, ainda, que dos alunos que responderam correctamente à questão, 12 (10,4%) alunos no pré-ensino e 13 (11,3%) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer justificação.

No pós-ensino, 10 alunos recorreram à fórmula da probabilidade condicionada para resolver correctamente a questão, como se exemplifica na Figura 53.



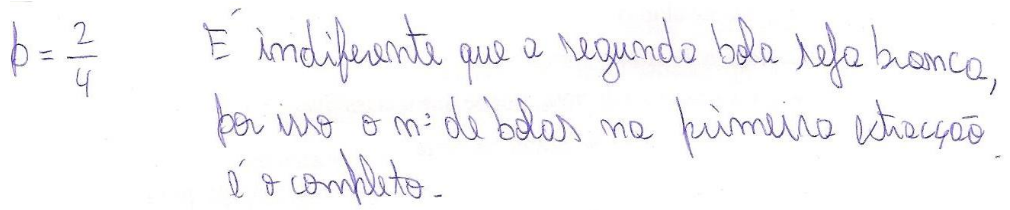
$$p(B_1|B_2) = \frac{p(B_2\cap B_1)}{p(B_2)} = \frac{p(B_2)\times p(B_1)}{p(B_1\cap B_2)+p(P_1\cap B_2)} = \frac{1/6}{1/6+1/3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

$$* \; p(P_1\cap B_2) = p(P_1)\times p(B_2|P_1) = \frac{2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$* \; p(B_2|B_1) = \frac{p(B_2\cap B_1)}{p(B_1)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{p(B_2\cap B_1)}{2/4} \Leftrightarrow p(B_2\cap B_1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Figura 53. Resolução da questão 6b) pelo aluno A_{28} no pós-ensino.

Das respostas incorrectas a esta questão, salienta-se que 65 (56,5%) alunos no pré-ensino e 38 (33,1%) alunos no pós-ensino consideraram que a segunda extracção não influencia o resultado da primeira, pelo que a probabilidade pedida era igual ao valor da probabilidade simples da primeira extracção. (ver Figura 54).



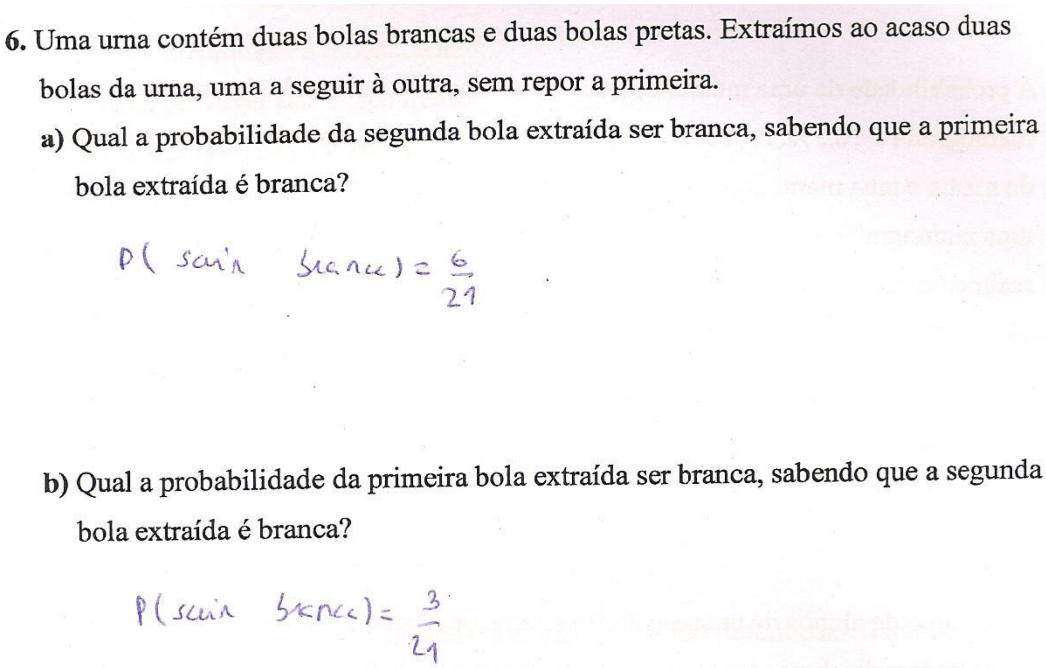
$p = \frac{2}{4}$

É indiferente que a segunda bola seja branca, por isso o nº de bolas na primeira extracção é o completo.

Figura 54. Resolução da questão 6b) pelo aluno A_{29} no pré-ensino.

Verificamos, ainda, que no pós-ensino 19 (24,3%) alunos utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada para resolver a questão, embora incorrectamente, enquanto no pré-ensino ela não foi utilizada por nenhum aluno.

Nas duas alíneas desta questão foi considerável o número de respostas dos alunos que não apresentaram qualquer justificação: na alínea a), 19 (16,5%) alunos no pré-ensino e 9 (7,8%) alunos no pós-ensino e na alínea b), 14 (12,2%) alunos no pré-ensino e 10 (8,7%) alunos no pós-ensino. Um exemplo do que foi mencionado apresenta-se na Figura 55.



6. Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.

a) Qual a probabilidade da segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca?

P(sair branca) = $\frac{6}{21}$

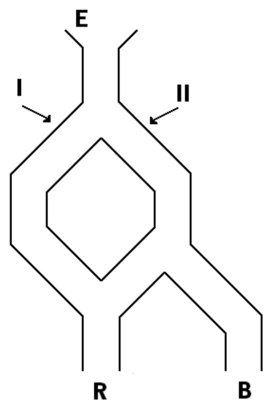
b) Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?

P(sair branca) = $\frac{3}{21}$

Figura 55. Resolução da questão 6 pelo aluno A110 no pós-ensino.

4.1.7. Questão 7

7. Solta-se uma bola em E. Se a bola sai por R, qual a probabilidade que tenha passado pelo canal I?



Nesta questão pretendíamos verificar se os alunos, ao calcular a probabilidade pedida, tinham em consideração que estávamos perante uma situação diacrónica, neste caso uma inversão do eixo temporal. Na tabela 8 estão registadas as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 8 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 7

	Questão 7	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	109 (94,8%)	102 (90,4%)
Correcta	2 (1,7%)	9 (6,1%)
Não respondentes	4 (3,5%)	4 (3,5%)

A resposta a esta questão, foi considerada correcta quando o valor da probabilidade pedida estava correcto, o que corresponde a $\frac{2}{3}$.

Ao observarmos os resultados obtidos, verificamos que apenas 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 9 (6,1%) alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão, o que significa um aumento de 7 (6,1%) alunos do pré-ensino para o pós-ensino. É de salientar que, comparativamente com a questão 6b), também envolvendo a inversão do eixo temporal, é ainda menor o número de alunos que respondeu correctamente à questão, quer no pré-ensino que no pós-ensino.

Analisando o método utilizado na resolução correcta desta questão, verificamos que, no pré-ensino, nenhum aluno recorreu à fórmula da probabilidade condicionada, tendo chegado ao valor correcto da probabilidade por análise dos percursos possíveis para a bola, como podemos verificar na Figura 56.

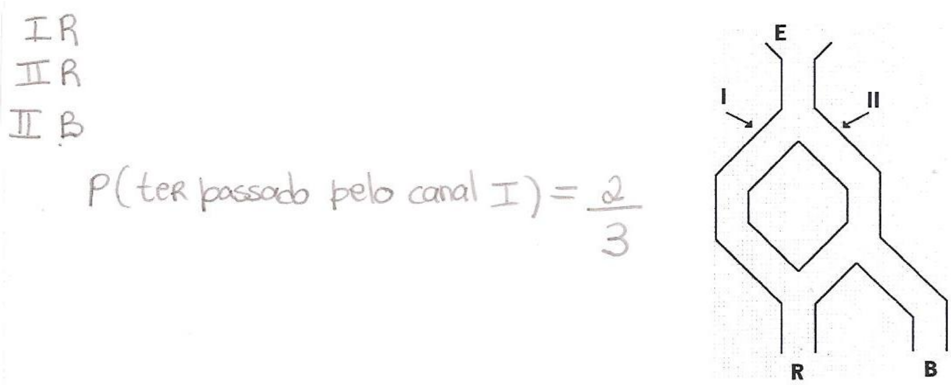


Figura 56. Resolução da questão 7 pelo aluno A_{78} no pré-ensino.

Apenas no pós-ensino 9 alunos utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada para responderam correctamente à questão, como podemos verificar na Figura 57.

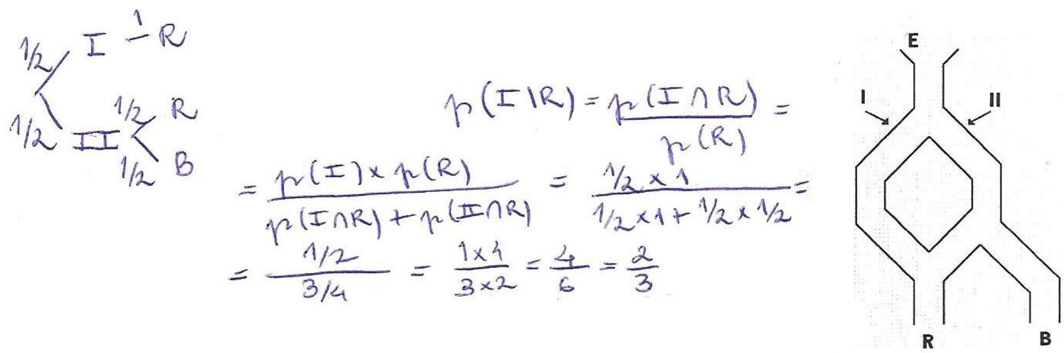


Figura 57. Resolução da questão 7 pelo aluno A_{28} no pós-ensino.

Relativamente às respostas incorrectas, verificamos que 98 (85,2%) alunos no pré-ensino e 90 (78,3%) alunos no pós-ensino apresentaram como valor da probabilidade $\frac{1}{2}$ (50%). Destes, 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e 5 (4,3%) no pós-ensino utilizaram o diagrama de árvore para determinar este valor, como se exemplifica na Figura 58.

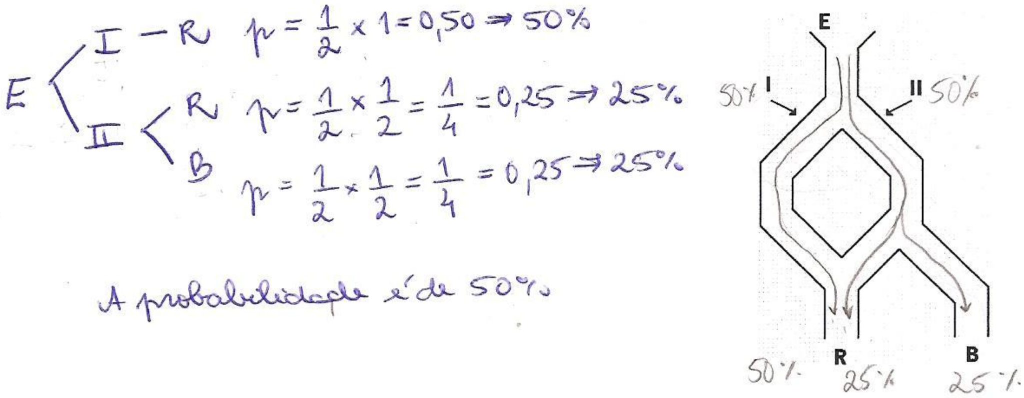


Figura 58. Resolução da questão 7 pelo aluno A28 no pré-ensino.

Ainda para obter este valor, 7 (6,1%%) alunos no pré-ensino e 12 (10,4%) alunos no pós-ensino usaram a linguagem corrente para justificar o valor encontrado, como se verifica no exemplo de resposta apresentado na Figura 59.

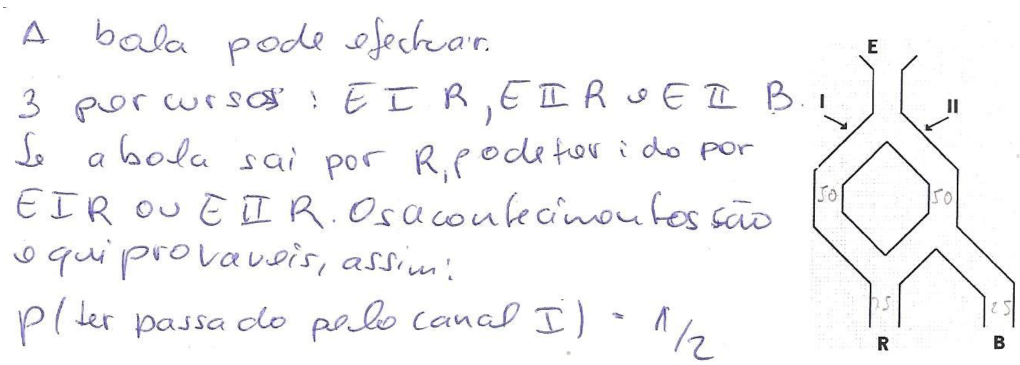


Figura 59. Resolução da questão 7 pelo aluno A47 no pré-ensino.

Este valor é apresentado sem qualquer tipo de justificação por 86 (76,5%) alunos no pré-ensino e por 62 (53,9%) alunos no pós-ensino como se pode verificar na Figura 60.

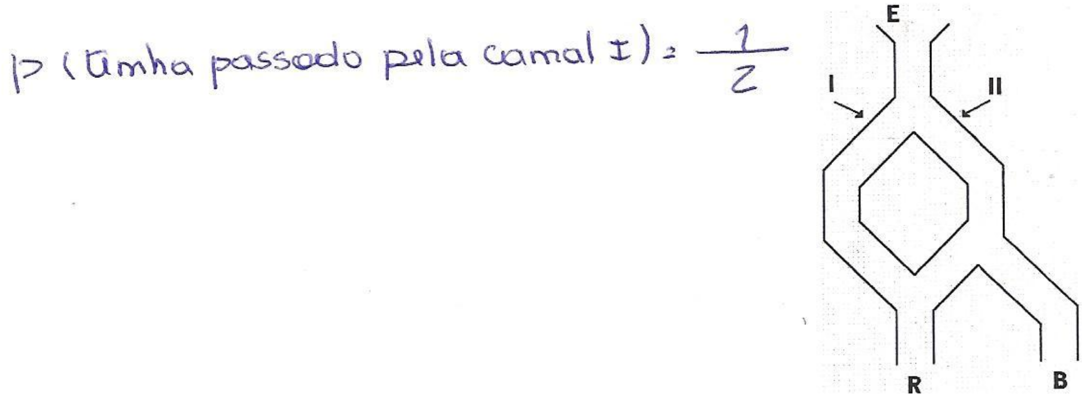


Figura 60. Resolução da questão 7 pelo aluno A22 no pós-ensino.

Nas respostas anteriores, em que os alunos indicaram o valor $\frac{1}{2}$ para a probabilidade, apesar de não o terem explicitado, é possível que subjacente às suas respostas tenha estado a ideia de que um acontecimento que ocorre depois (sair por R) não pode afectar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes (passar por I), ou seja, que tenham aderido à falácia do eixo temporal.

De novo, apenas no pós-ensino, este valor foi apresentado por 11 (9,6%) alunos, que utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada para resolver a questão. (Ver Figura 61).

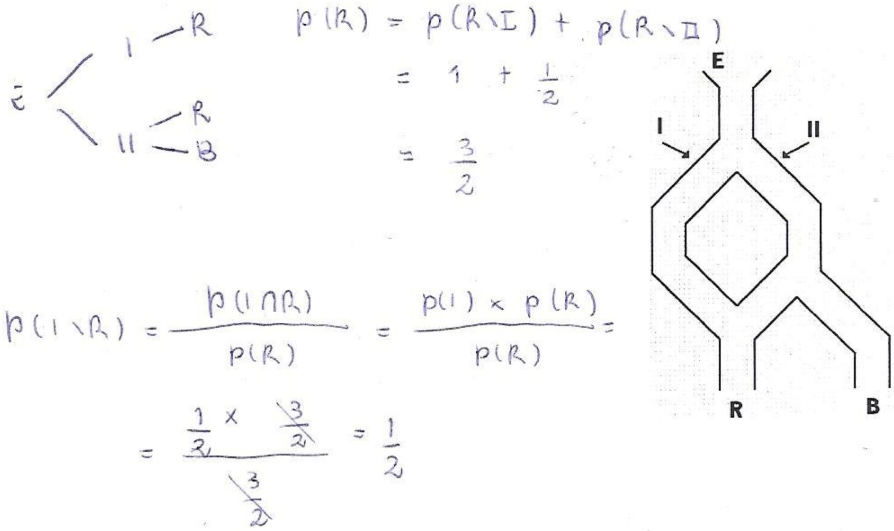


Figura 61. Resolução da questão 7 pelo aluno A26 no pós-ensino.

Este aluno cometeu dois erros, um foi ter obtido para a probabilidade de R um valor superior à unidade, não o tendo criticado, outro erro foi considerar que os acontecimentos “passar em I” e “sair em R” eram independentes, multiplicando os valores das probabilidades simples para obter o valor da probabilidade conjunta.

Verificamos ainda que 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino responderam $\frac{1}{4}$, não se apercebendo que o percurso E-I-B era impossível (ver Figura 62).

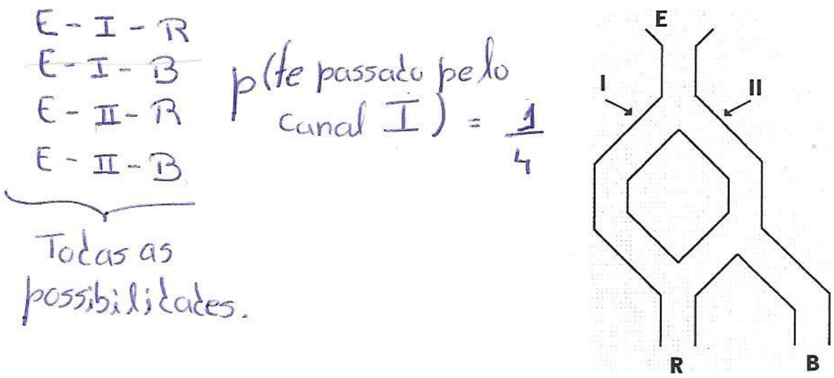


Figura 62. Resolução da questão 7 pelo aluno A_{27} no pré-ensino.

Note-se que o aluno A_{27}, para além de incluir o percurso E-I-B, parece ter considerado apenas um dos percursos que conduzem a R.

O valor $\frac{1}{3}$ foi também um valor indicado para a probabilidade pedida. Este valor foi obtido por 5 (6,3%) alunos no pré-ensino e por 2 (1,7%) alunos no pós-ensino, parecendo ter resultado da selecção de um percurso de entre três possíveis (ver Figura 63).

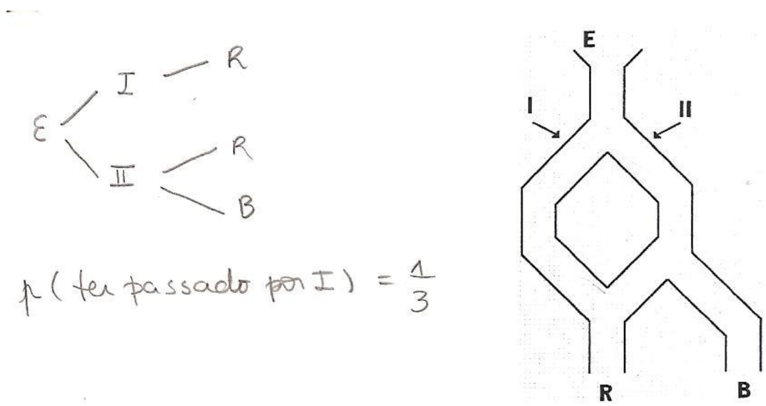


Figura 63. Resolução da questão 7 pelo aluno A_{63} no pré-ensino

O valor $\frac{3}{4}$ foi a resposta dada por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e por 5 (4,3%) alunos no pós-ensino. Destes, 3 (2,7%) alunos no pós-ensino determinaram este valor através da fórmula da probabilidade condicionada, como se pode verificar na resolução do aluno A27 no pós-ensino, apresentada na Figura 64.

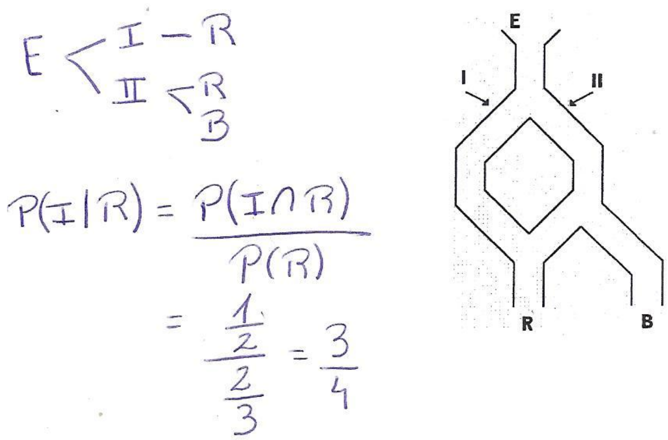


Figura 64. Resolução da questão 7 pelo aluno A27 no pós-ensino.

Note-se que o aluno, apesar de ter construído correctamente o diagrama de árvore, determinou incorrectamente o valor da probabilidade $p(R)$.

Finalmente, 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino deram respostas que denotam que não terem compreendido a questão. Os 2 alunos no pré-ensino compararam a probabilidade de passar em I com a de passar em II, dizendo: "a primeira é maior que a segunda", sem indicarem qualquer valor. O aluno no pós-ensino referiu que a resolução devia envolver a fórmula da probabilidade condicionada, mas não sabia como o fazer.

4.1.8. Questão 8

8. Numa cidade 60% da população são homens e 40% mulheres. Também se sabe que 50% dos homens e 25% das mulheres fumam. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de ser fumadora?

Nesta questão, cujo objectivo era que os alunos calculassem o valor de uma probabilidade total, pretendia-se analisar se os alunos consideravam que o valor da probabilidade pedida é o resultado da soma do produto das probabilidades que constituem os acontecimentos parciais.

Na tabela 9 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 8.

Tabela 9 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 8

	8	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	68 (59,1%)	50 (43,5%)
Correcta	44 (38,3%)	64 (55,7%)
Não respondentes	3 (2,6%)	1 (0,9%)

Consideramos correcta a resposta a esta questão quando os alunos apresentavam o valor correcto para a probabilidade pedida.

Observando a tabela verificamos que a maior parte dos alunos no pré-ensino respondeu incorrectamente a esta questão, dado que apenas 44 (38,3%) dos alunos deu uma resposta correcta, no entanto esta situação ficou alterada no pós-ensino, uma vez que houve um aumento percentual de 17,4% de respostas correctas o que em valores absolutos corresponde a um aumento de 20 alunos.

Foram vários os métodos utilizados pelos alunos para responder correctamente a esta questão, tendo 39 (39,1%) alunos no pré-ensino e 49 (42,6%) alunos no pós-ensino efectuado a resolução através da expressão da soma dos produtos das probabilidades dos acontecimentos parciais, como podemos verificar na Figura 65 onde se apresenta a proposta de resolução do aluno A_3 no pré-ensino.

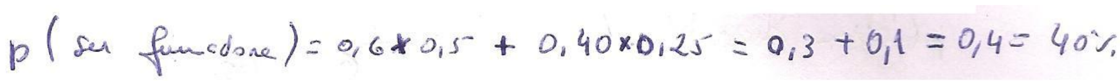
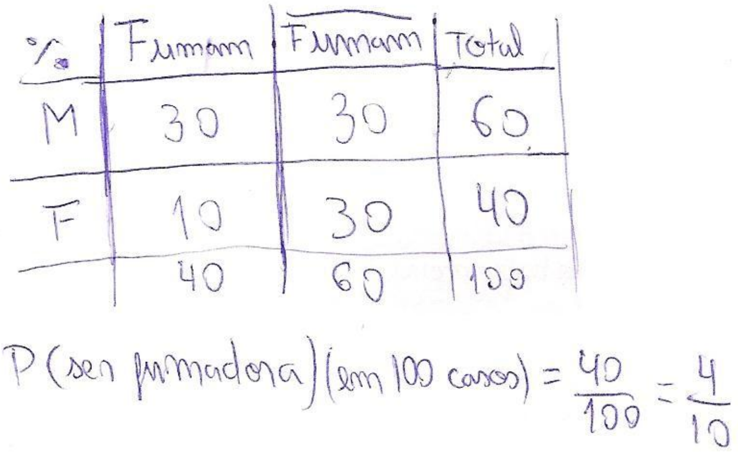


Figura 65. Resolução da questão 8 pelo aluno A_3 no pré-ensino.

Outro método utilizado por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e por 13 (11,3%) alunos no pós-ensino, foi a elaboração de uma tabela de contingência para melhor entenderem os dados propostos na questão como podemos verificar na Figura 66 onde se apresenta a proposta de resolução do aluno A_{33} no pós-ensino.



%	Fumam	$\overline{\text{Fumam}}$	Total
M	30	30	60
F	10	30	40
	40	60	100

$$P(\text{ser fumadora})(\text{em } 100 \text{ casos}) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$$

Figura 66. Resolução da questão 8 pelo aluno A_{33} no pós-ensino.

A construção de um diagrama de árvore foi o método utilizado por 1 (0,9%) aluno no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino para concluir o valor da probabilidade pedida como podemos verificar na Figura 67 onde se apresenta a proposta de resolução do aluno A_{31} no pós-ensino.

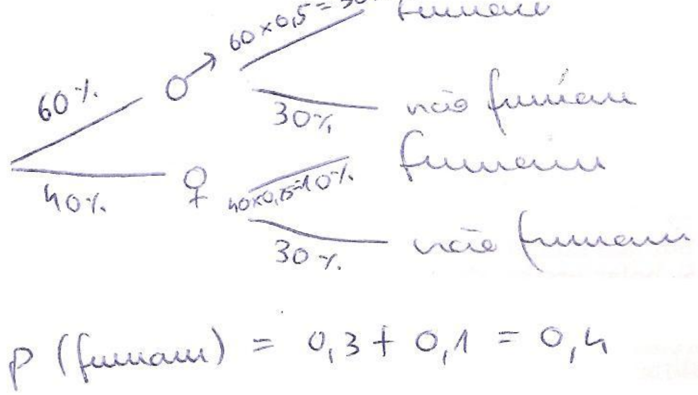


Figura 67. Resolução da questão 8 pelo aluno A_{31} no pós-ensino.

Enquanto que a fórmula da probabilidade condicionada foi utilizada por 1 (0,9%) aluno no pós-ensino, como podemos verificar na Figura 68 onde se apresenta a resposta proposta pelo aluno A_{14} no pós-ensino.

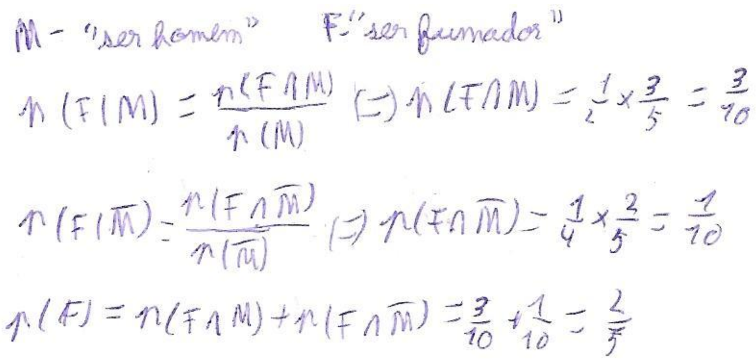


Figura 68. Resolução da questão 8 pelos alunos A_{14} no pós-ensino.

Das respostas incorrectas que obtivemos a esta questão, salientam-se 44 (38,3%) alunos no pré-ensino e 23 (20,0%) alunos no pós-ensino que indicam um valor para a probabilidade pedida sem apresentarem qualquer justificação para o valor determinado, como podemos constatar na Figura 69 .

Figura 69. Resolução da questão 8 pelos alunos A_{40} no pós-ensino.

Outros alunos efectuaram cálculos para determinar o valor da probabilidade pedida na questão e para efectuarem os cálculos necessários recorreram aos métodos já mencionados, tendo 7 (6,1%) alunos no pós-ensino utilizado o diagrama de árvore, conforme se verifica na Figura 70.

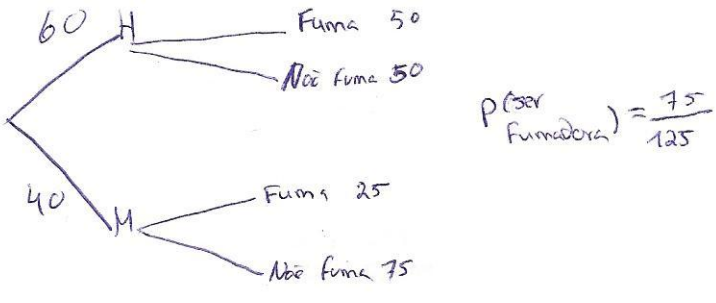


Figura 70. Resolução da questão 8 pelos alunos A_{112} no pós-ensino.

O diagrama de Venn foi utilizado por 7 (6,1%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) alunos no pós-ensino e 2 (1,7%) no pré-ensino conforme se pode verificar na Figura 71.

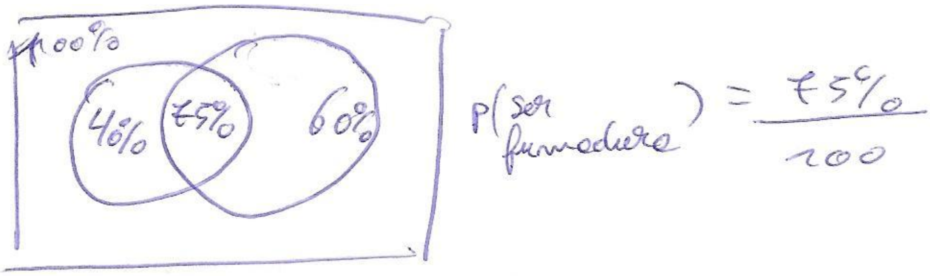
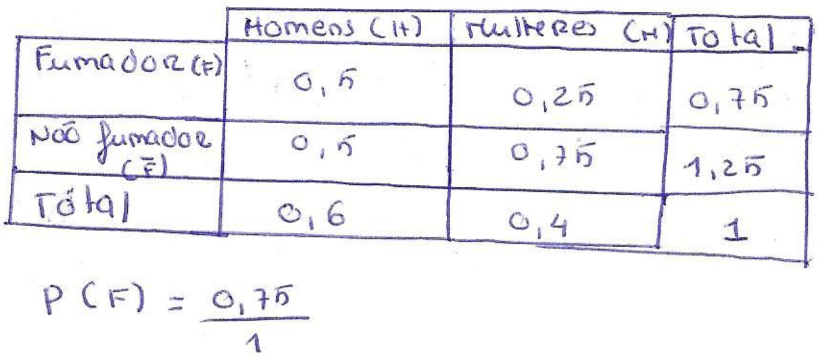


Figura 71. Resolução da questão 8 pelos alunos A24 no pré-ensino.

É de salientar na resposta deste aluno que não tem em atenção o facto de estar a trabalhar com valores percentuais, pois para apresentar o valor da probabilidade faz o quociente entre o valor da percentagem calculada por cem.

A tabela de contingência foi também um dos métodos escolhidos para a resolução da questão por 7 (6,1%) no pós-ensino, como podemos verificar na Figura 72.



	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Fumador (F)	0,5	0,25	0,75
Não fumador ($\bar{F}$)	0,5	0,75	1,25
Total	0,6	0,4	1

$P(F) = \frac{0,75}{1}$

Figura 72. Resolução da questão 8 pelo aluno A23 no pós-ensino.

Este aluno ao elaborar a tabela de contingência, indica que a última linha é o total dos valores da respectiva coluna, mas não efectua a adição desses valores, colocando aí o valor da probabilidade condicionada apresentado no enunciado da questão.

Outros resultados incorrectos foram determinados por 12 (10,4%) alunos no pré-ensino e por 7 (6,1%) alunos no pós-ensino e podem resultar de uma interpretação incorrecta do enunciado da questão, como podemos verificar na Figura 73 onde o aluno considera que a questão apenas pede a probabilidade das mulheres fumadoras, uma vez que apenas considera estas.

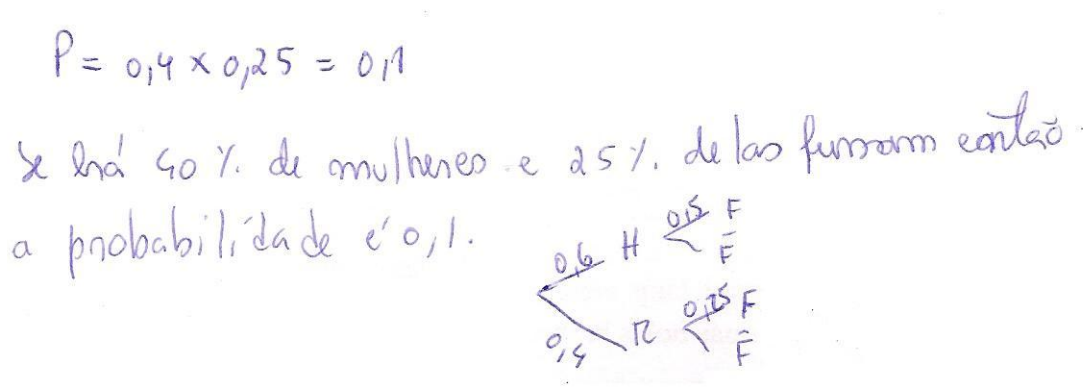


Figura 73. Resolução da questão 8 pelo aluno A43 no pré-ensino.

Outro exemplo da interpretação errada da questão está exemplificada na Figura 74. Este aluno considera que o espaço amostral é formado pelos elementos constituinte do Universo dos fumadores e que os casos favoráveis são constituidos só pelo número de mulheres fumadoras.

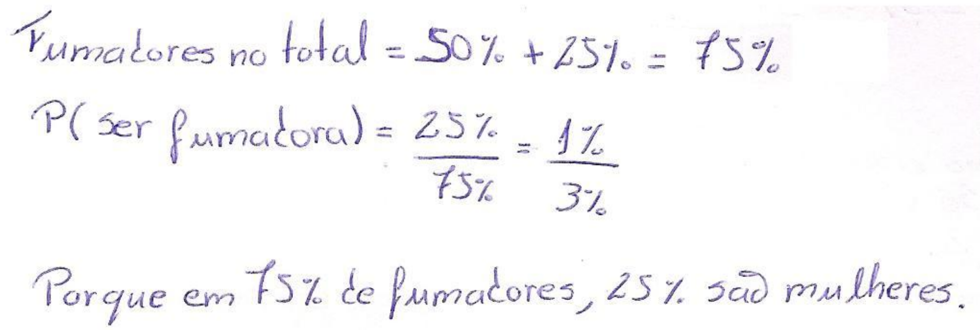


Figura 74. Resolução da questão 8 pelo aluno A27 no pré-ensino.

4.1.9. Questão 9

9. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter um resultado positivo numa mamografia é 10,3%. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter cancro de mama e uma mamografia positiva é 0,8%. Uma mulher de mais de 40 anos fez uma mamografia e deu resultado positivo. Qual a probabilidade da mulher ter realmente cancro de mama?

Nesta questão pretendia-se que os alunos determinassem o valor de uma probabilidade condicionada, quando são dados os valores da probabilidade simples e da probabilidade conjunta.

Na tabela 10 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 10 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 9

	Questão 9	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	57 (49,6%)	48 (41,7%)
Correcta	30 (26,1%)	36 (31,3%)
Não respondentes	28 (24,3%)	31 (27,0%)

Considerou-se correcta resposta a esta questão quando o valor da probabilidade pedida estava bem determinado, independentemente da aproximação considerada pelo aluno.

Da análise dos valores registados, verificamos que 30 (26,1%) alunos responderam correctamente a esta questão no pré-ensino e 36 (31,3%) alunos no pós-ensino, o que significa um aumento de 6 (5,2%) alunos do pré-ensino para o pós-ensino. Destes alunos, registámos que 29 (25,2%) alunos no pré-ensino e 26 (22,6%) alunos no pós-ensino indicaram o valor correcto para a probabilidade pedida, dividindo as probabilidades dadas sem apresentarem a fórmula da probabilidade condicionada, como podemos verificar na Figura 75.

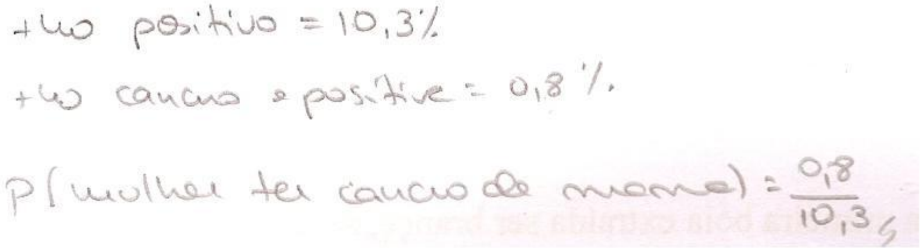


Figura 75. Resolução da questão 9 pelo aluno A47 no pré-ensino.

No entanto, no pré-ensino, 1 (0,9%) aluno utilizou o diagrama de Venn para dispor os valores indicados no problema justificou, como se verifica na Figura 76.

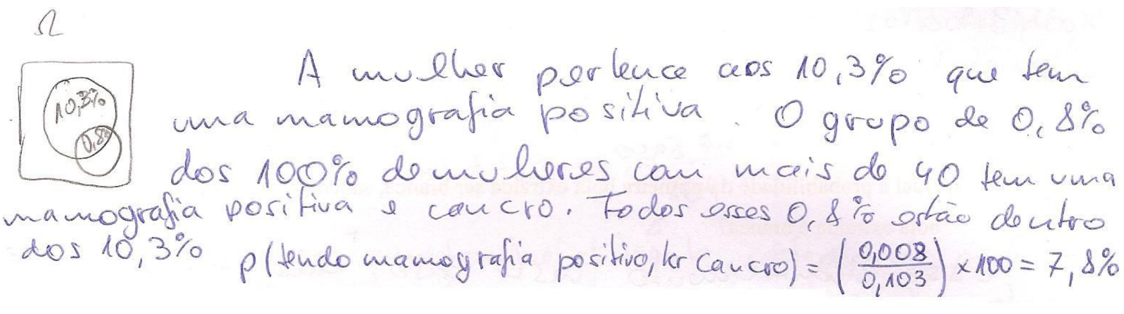


Figura 76. Resolução da questão 9 pelo aluno A47 no pré-ensino.

No pós-ensino, 10 (7,8%) alunos utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada para determinar a probabilidade pretendida. Destes, 1 aluno começou por usar o diagrama de árvore para dispor os valores do problema, usando depois a fórmula da probabilidade condicionada (ver Figuras 77 e 78).

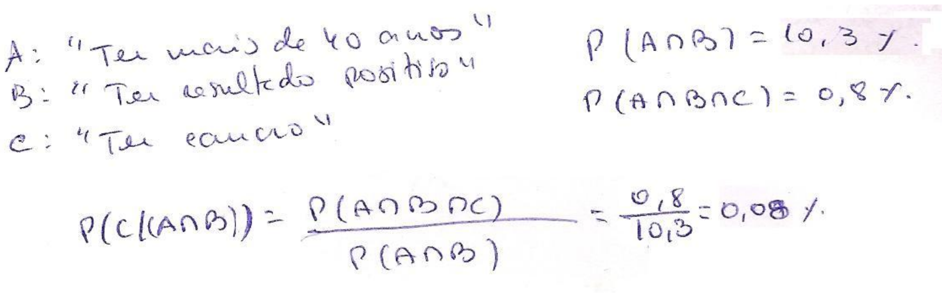


Figura 77. Resolução da questão 9 pelo aluno A13 no pós-ensino.

É de salientar que este aluno introduziu o acontecimento "ter mais de 40 anos", não notando a sua irrelevância para o cálculo da probabilidade em causa. Verifica-se, ainda, que o aluno apresenta erradamente o resultado em percentagem, não o multiplicando por 100.

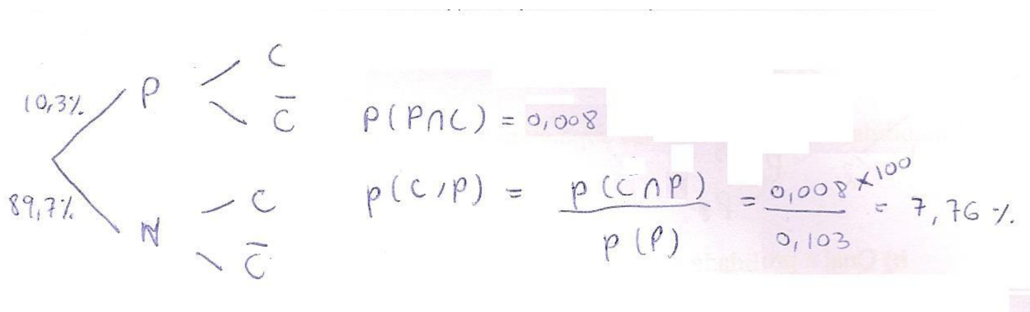
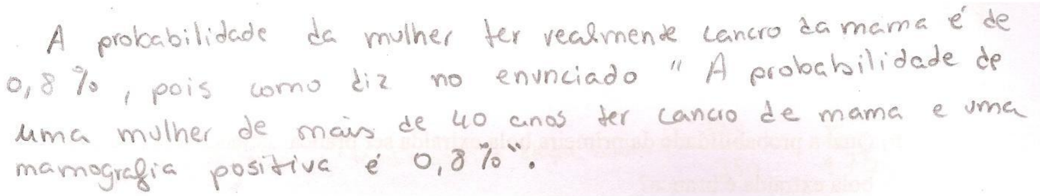


Figura 78 Resolução da questão 9 pelo aluno A26 no pós-ensino.

Das respostas incorrectas dadas pelos alunos nesta questão, salientam-se 37 (32,2%) alunos no pré-ensino e 20 (17,4%) alunos no pós-ensino que apresentaram como resultado o valor de 0,8%, que é o valor da probabilidade conjunta indicada no enunciado do problema, sem acrescentarem qualquer justificação (ver Figura 79).

Figura 79. Resolução da questão 9 pelo aluno A6 no pré-ensino.

Mais 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino dão como resposta o valor da probabilidade conjunta. Neste caso, embora sem o conseguirem, os alunos tentam justificar esse valor, como podemos verificar na resposta apresentada na Figura 80.

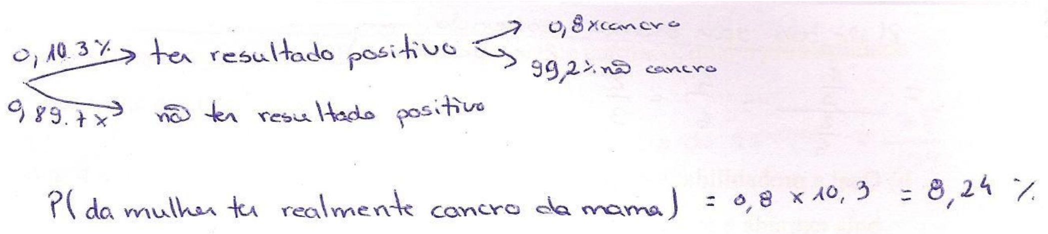


A probabilidade da mulher ter realmente cancro da mama é de 0,8 %, pois como diz no enunciado " A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter cancro de mama e uma mamografia positiva é 0,8 %".

Figura 80. Resolução da questão 9 pelo aluno A57 no pós-ensino.

Na resposta deste aluno é clara a distinção entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada, podendo conjecturar-se que esta dificuldade seja comum aos outros alunos que deram esta resposta, apesar de não terem apresentado qualquer justificação.

Efectuar o produto dos valores das probabilidades dadas foi o erro cometido por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e por 12 (10,4%) aluno no pós-ensino, como se exemplifica na Figura 81.

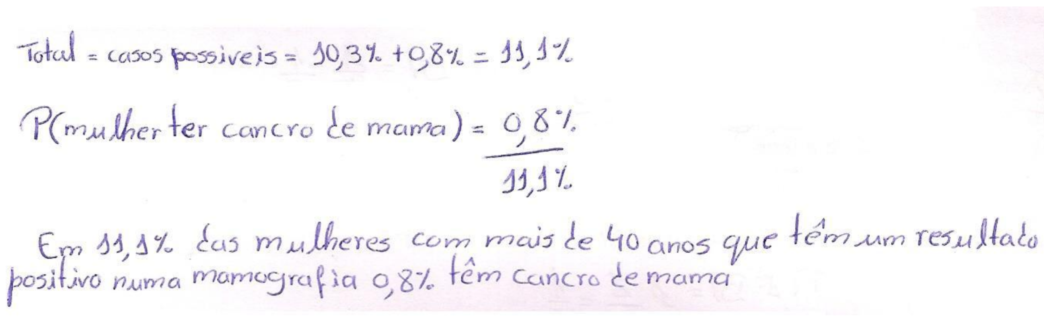


P(da mulher ter realmente cancro da mama) = 0,8 × 10,3 = 8,24 %

Figura 81. Resolução da questão 9 pelo aluno A96 no pós-ensino.

O aluno utilizou o diagrama de árvore para organizar os dados do problema, mas não identificou a probabilidade pedida como uma probabilidade condicionada, considerando-a como uma probabilidade conjunta.

Outras respostas incorrectas foram apresentadas por 7 (6,1%) alunos no pré-ensino e 3 (2,6%) alunos no pós-ensino, considerando para valor dos casos possíveis a soma dos valores das probabilidades dadas, como podemos verificar na Figura 82.



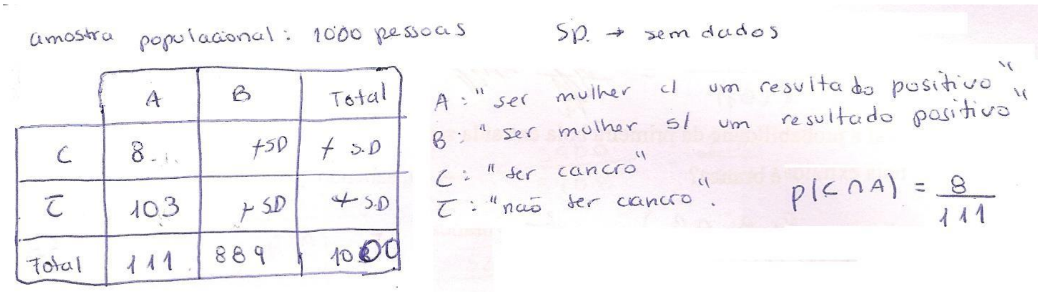
Total = casos possíveis = 10,3% + 0,8% = 11,1%

P(mulher ter cancro de mama) = $\frac{0,8\%}{11,1\%}$

Em 11,1% das mulheres com mais de 40 anos que têm um resultado positivo numa mamografia 0,8% têm cancro de mama

Figura 82. Resolução da questão 9 pelo aluno A27 no pré-ensino.

Apenas no pós-ensino, 1 (1,7%) aluno utilizou uma tabela de contingência para registar os dados, tendo adicionado os valores dados para obter o número de casos possíveis, tal como os alunos atrás mencionados (ver Figura 83), e outro aluno resolveu a questão utilizando o teorema da probabilidade da união de dois acontecimentos, como podemos verificar na Figura 84.



	A	B	Total
C	8	+SD	+SD
C̄	103	+SD	+SD
Total	111	889	1000

Figura 83. Resolução da questão 9 pelo aluno A67 no pós-ensino.

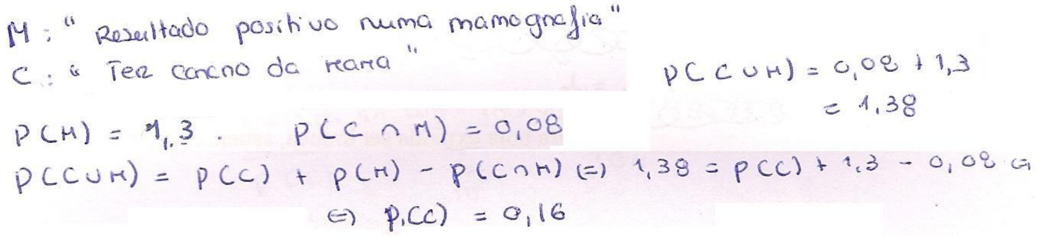


Figura 84. Resolução da questão 9 pelo aluno A23 no pós-ensino.

Note-se que na resolução proposta pelo aluno A23 se considera para as probabilidades $P(M)$ e de $P(C \cup M)$ um valor superior à unidade, não apresentando qualquer objecção a este valor. Ainda é de registar na resolução deste aluno a utilização de duas fórmulas distintas na determinação de $P(C \cup M)$: primeiro começa por aplicar a fórmula da probabilidade da união de acontecimentos mutuamente exclusivos, para de seguida aplicar o teorema da probabilidade da união para acontecimentos não mutuamente exclusivos.

Salientam-se ainda 1 aluno no pré-ensino e outro aluno no pós-ensino que utilizaram o diagrama de Venn para organizar os valores dados no enunciado do problema, não tendo, no entanto, conseguido chegar a um resultado para o valor da probabilidade pedida. Ainda 1 aluno no pré-ensino comparou a ordem de grandeza dos valores das probabilidades indicadas no enunciado da questão, tendo referido que "a probabilidade de ter cancro é menor que a probabilidade da mamografia dar um resultado positivo".

Gigerenzer (citado por Diaz, 2009, p. 113) considera que os alunos demonstram maior dificuldade na resolução deste tipo de questões quando os dados são apresentados em formatos probabilísticos. Neste caso, verificamos que 1 aluno no pós-ensino e outro no pré-ensino, simularam valores para a população, para assim obterem os valores absolutos correspondentes aos dados fornecidos na questão e poderem mais facilmente determinar a probabilidade pedida (ver Figura 85).

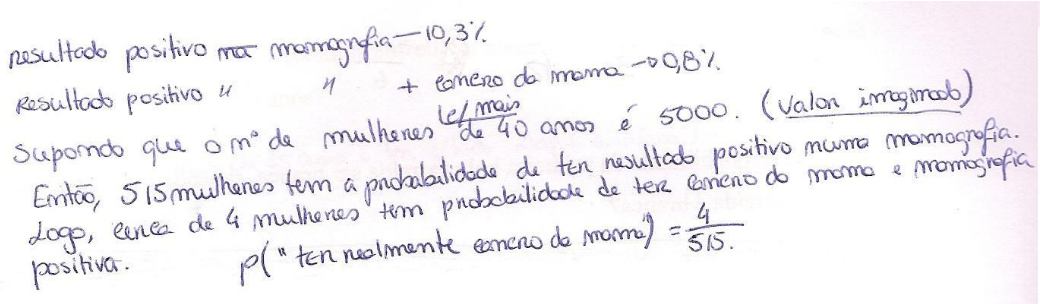

resultado positivo ~~na~~ mamografia — 10,3%
Resultado positivo " " + cancro da mama → 0,8%
Supondo que o nº de mulheres c/ mais de 40 anos é 5000. (Valor imaginado)
Então, 515 mulheres tem a probabilidade de ter resultado positivo numa mamografia.
Logo, cerca de 4 mulheres tem probabilidade de ter cancro da mama e mamografia positiva.
p("ter realmente cancro da mama") = $\frac{4}{515}$.

Figura 85. Resolução da questão 9 pelo aluno A_{34} no pré-ensino.

A este propósito, recorde-se que o aluno A_{67} no pós-ensino, cuja resolução se apresentou na Figura 83, considerou na elaboração da tabela de contingência uma amostra de 1000 pessoas.

4.1.10. Questão 10

> **10.** Um grupo de alunos de uma escola fez exame de Matemática e de Inglês. A percentagem de alunos aprovados a Matemática é de 80% e a percentagem de alunos aprovados a Inglês é de 70%. Supõe que a classificação obtida numa das disciplinas não afecta a classificação obtida na outra.
> Qual a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso, ter sido aprovado nas duas disciplinas?

Nesta questão trata-se de determinar uma probabilidade conjunta quando os acontecimentos são independentes. Especificamente, pretendíamos verificar se os alunos interpretavam o enunciado "a classificação obtida numa das disciplinas não afecta a classificação obtida na outra" como significando que os acontecimentos são independentes.

Na tabela 11 estão registadas as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 11 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 10

	Questão 10	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Incorrecta	78 (67,8%)	59 (51,3%)
Correcta	11 (9,6%)	32 (27,8%)
Não respondentes	26 (22,6%)	24 (20,9%)

A resposta correcta para esta questão é de 56%, que resulta do produto das probabilidades dos dois acontecimentos.

Por análise das respostas dadas, verificamos que apenas 11 (9,5%) alunos no pré-ensino responderam correctamente à questão. Este valor aumentou para 32 (27,8%) alunos no pós-ensino, o que corresponde a um aumento de 21 (18,3%) alunos.

Todos os alunos que responderam correctamente à questão identificaram os acontecimentos como independentes, pelo que para determinar a probabilidade conjunta efectuaram o produto das probabilidades simples, como podemos verificar na Figura 86.

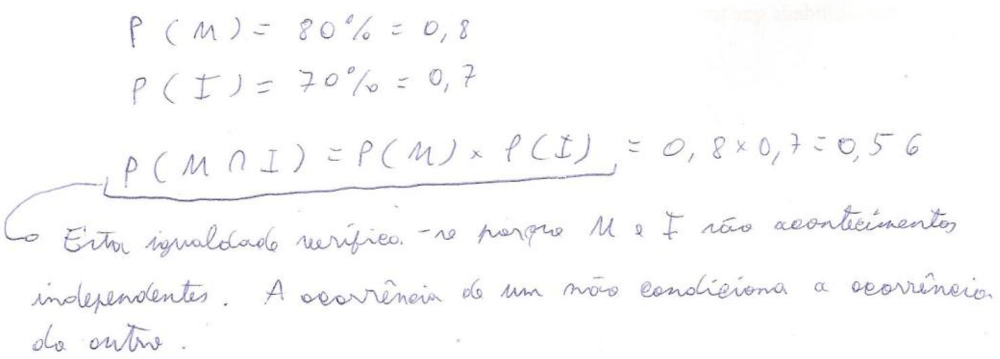


Figura 86. Resolução da questão 10 pelo aluno A_1 no pós-ensino.

Analisando as respostas incorrectas dadas pelos alunos, verificamos que 29 (25,2%) alunos no pré-ensino e 15 (13,0%) alunos no pós-ensino recorreram ao diagrama de Venn para determinar o valor da probabilidade pedida, como podemos verificar na Figura 87.

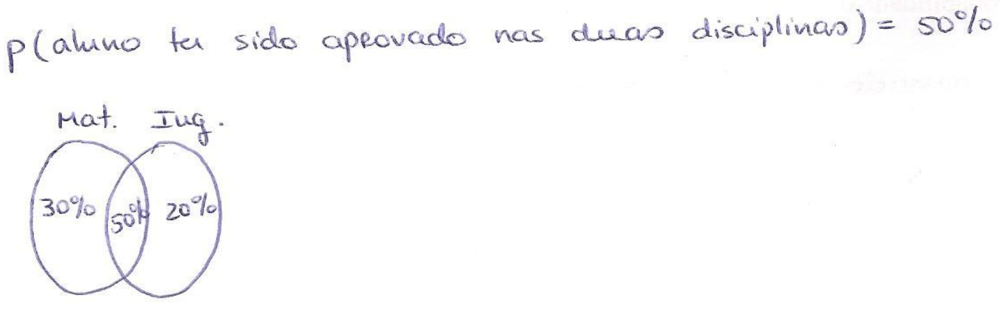


Figura 87. Resolução da questão 10 pelo aluno A_{56} no pré-ensino.

Note-se que o aluno considerou que universo era formado pelos alunos que tinham pelo menos uma das disciplinas, o que o levou a separar os valores dados em $30\% + 50\%$ para os aprovados em Matemática e $20\% + 50\%$ para os aprovados a Inglês. Donde, os alunos aprovados às duas disciplinas seriam os 50% com as disciplinas comuns.

O diagrama de árvore foi a estratégia seguida por 13 (11,3%) alunos, no pós-ensino, para organizar os dados do enunciado e seguidamente determinar o valor da probabilidade, como se exemplifica na Figura 88. Esta estratégia não foi utilizada por nenhum aluno no pré-ensino.

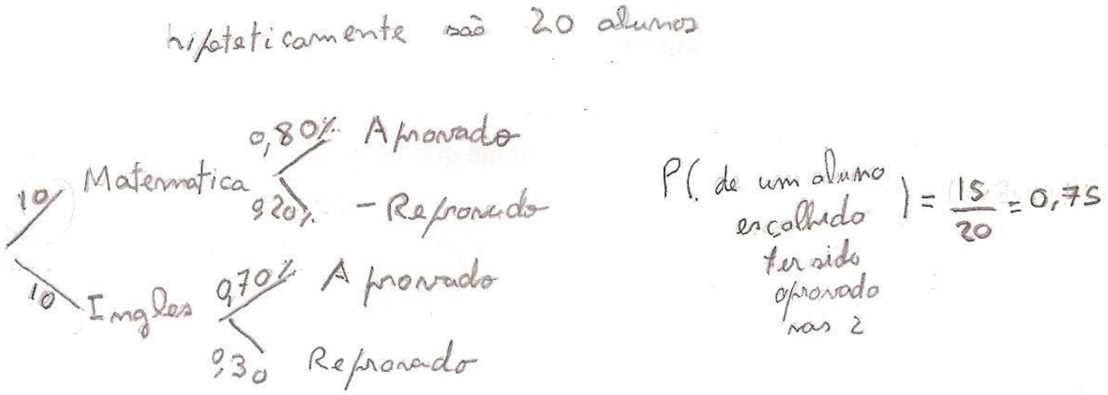


Figura 88. Resolução da questão 10 pelo aluno A74 no pós-ensino.

Como podemos verificar, este aluno considerou o Universo constituído por 20 alunos sendo 10 de Matemática e outros 10 de Inglês, partiu da hipótese errada de que os acontecimentos "ser aluno de Matemática" e "ser aluno de Inglês" eram disjuntos. Calculou o número de alunos aprovados a Matemática $(0{,}8\times10=8)$ e o número de alunos aprovados a Inglês $(0{,}7\times10=7)$, adicionou e obteve assim os 15 alunos que constituem o número dos casos favoráveis na sua resolução.

Também 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino organizaram os dados numa tabela de contingência, como podemos verificar no exemplo exposto na Figura 89.

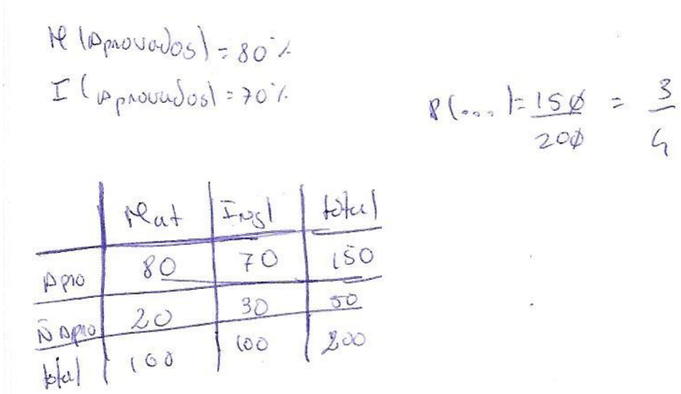


Figura 89. Resolução da questão 10 pelo aluno A10 no pós-ensino.

Neste caso, o aluno determinou a razão entre a percentagem total de alunos aprovados e a percentagem total de alunos (aprovados e não aprovados) nas duas disciplinas, o que representa a probabilidade de ser aprovado (considerando os acontecimentos disjuntos).

Outro erro cometido pelos alunos foi terem determinado o valor da probabilidade pedida através do cálculo do valor médio dos valores das probabilidades dadas na questão. Este erro foi efectuado por 6 (5,2%) alunos no pré-teste e por 1 (0,9%) aluno no pós-teste (ver Figura 90).

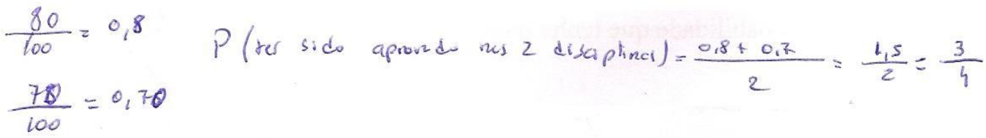


Figura 90. Resolução da questão 10 pelo aluno A_{66} no pré-ensino.

Na Figura 91, podemos observar outro erro cometido por 3 alunos no pré-ensino e por 4 alunos no pós-ensino, que parecem ter recorrido à probabilidade total na sua resolução.

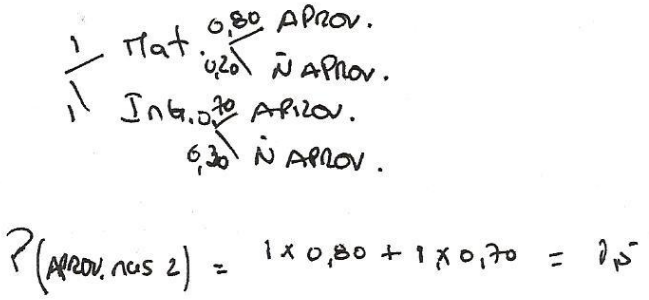


Figura 91. Resolução da questão 10 pelo aluno A_{100} no pós-ensino.

Apesar de não traduzir o significado das várias probabilidades que intervêm na fórmula da probabilidade total, a resolução deste aluno segue a estrutura dessa fórmula. Por outro lado, o aluno chega a um valor da probabilidade superior a 1 sem questionar esse facto.

A subtracção dos valores das probabilidades dadas foi o processo de resolução usado por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino e por 2 (1,7%) alunos no pós-ensino. Na resolução apresentada na Figura 92, o aluno não extrai quaisquer consequências do diagrama de árvore usado.

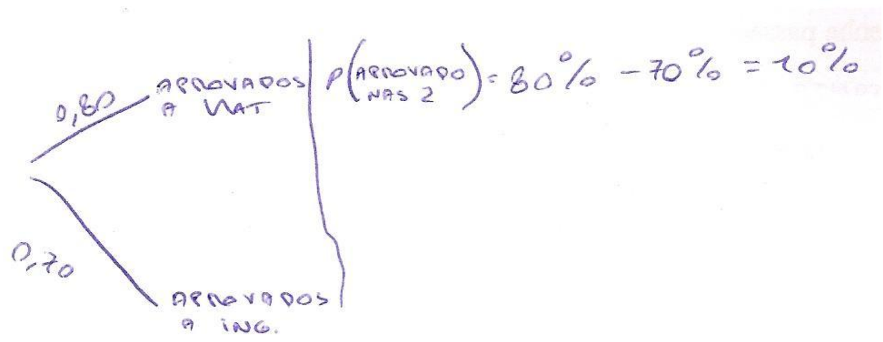


Figura 92. Resolução da questão 10 pelo aluno A_{87} no pós-ensino.

É de salientar ainda nas resoluções propostas pelos alunos o uso da fórmula da probabilidade da união de acontecimentos compatíveis, utilizado por 3 (2,6%) alunos no pré-ensino, e da fórmula da probabilidade condicionada, que foi utilizada por 2 (1,7%) alunos no pós-ensino. Na Figura 93, observa-se que o aluno usou erradamente a fórmula da união e um dos dados, sendo este último exactamente o que era pedido na questão.

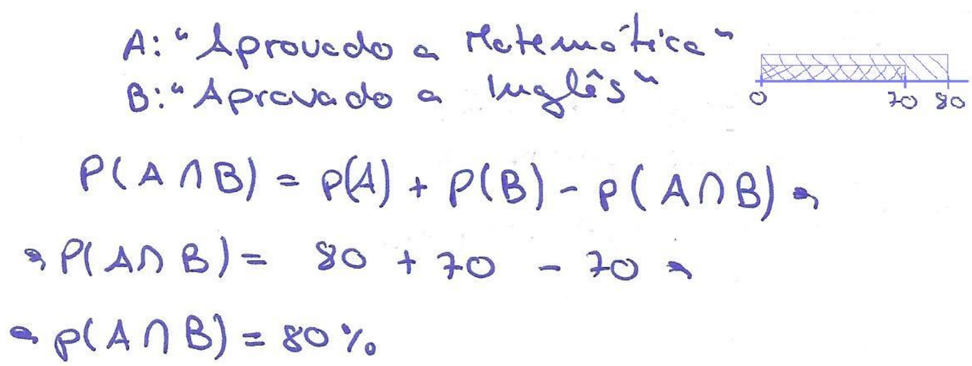


Figura 93. Resolução da questão 10 pelo aluno A_{16} no pré-ensino.

Na Figura 94, verifica-se que o aluno em questão recorreu à fórmula da probabilidade condicionada, tendo suposto, sem fundamento, que os alunos em Matemática e em Inglês se distribuíam na mesma proporção.

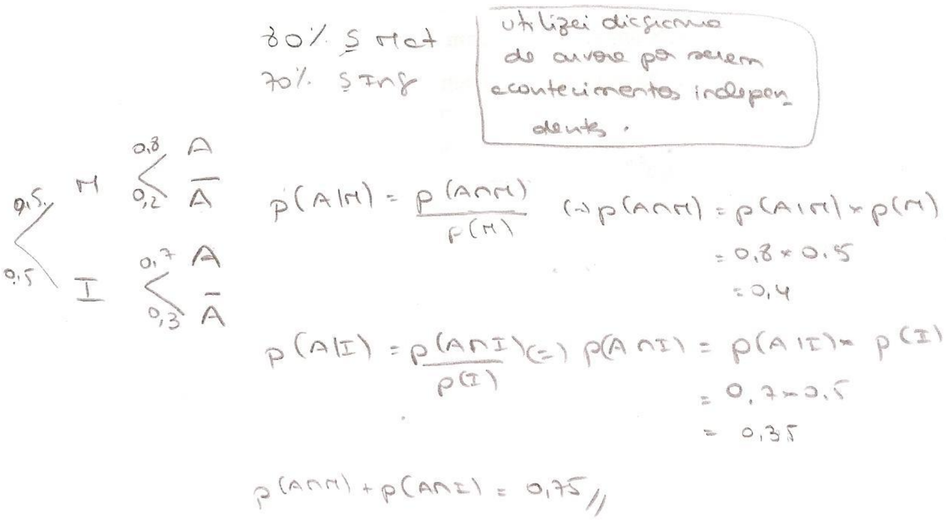


Figura 94 Resolução da questão 10 pelo aluno A48 no pós-ensino.

Respostas sem qualquer justificação foram apresentadas por 23 alunos no pré-ensino e por 20 alunos no pós-ensino, como se pode ver na Figura 95.

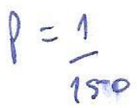


Figura 95. Resolução da questão 10 pelo aluno A111 no pós-ensino.

Finalmente, destaca-se nesta questão o elevado número de alunos que não respondeu à questão, 26 (22,6%) alunos no pré-ensino e 24 (20,9%) alunos no pós-ensino. Ainda 8 (7,0%) alunos no pré-ensino apenas escreveram os dados do enunciado e não elaboraram qualquer raciocínio com eles.

4.1.11. Questão 11

11. Uma pessoa lança uma moeda ao ar e anota se sai a face frente (F) ou a face verso (V). Em 6 lançamentos da moeda obtiveram-se os resultados: V F V V V V. Lançando novamente a moeda, então:

☐ É mais provável sair a face frente.
☐ É mais provável sair a face verso.
☐ É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso.

Explica o raciocínio que usaste.

Nesta questão pretendia-se que os alunos comparassem as probabilidades de obter cada uma das faces de uma moeda, conhecidos os resultados de seis lançamentos anteriores. Na resolução desta questão é determinante o reconhecimento de que se trata de acontecimentos independentes. Na tabela 12, apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 12 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 11

	11	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
É mais provável sair a face frente.	2 (1,7%)	4 (3,5%)
É mais provável sair a face verso.	17 (14,8%)	10 (8,7%)
É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso.	95 (82,6%)	101 (87,8%)
Não respondentes	1 (0,9%)	—

A resposta correcta a esta questão é a opção "É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso", que foi seleccionada pela grande maioria dos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino. Como se pode verificar, 95 (82,6%) alunos no pré-ensino responderam correctamente à questão, enquanto no pós-ensino esta questão foi correctamente respondida por 101 (87,8%) alunos, verificando-se assim um aumento de 6 alunos a responderem correctamente, o que corresponde a um aumento percentual de 5,2%.

Relativamente aos raciocínios apresentados pelos alunos, que os conduziu à resposta escolhida, usou-se a categorização dos raciocínios proposta por Fernandes (1990, p.78):

– Raciocínio "aceite pela escola", sempre que este estava alicerçado na equiprobabilidade e independência dos acontecimentos, ou no número de elementos do espaço amostral;

– "Aleatoriedade", quando estavam baseados no acaso, na equiprobabilidade de V e F ou na referência ao espaço amostral;

– "Causalidade", quando o raciocínio do aluno assentava em factores causais;

– "Propriedades da sequência", englobando dois tipos de raciocínios: um, a partir da desigualdade do número de Vs e Fs, levou os alunos a concluir a não equiprobabilidade dos acontecimentos, pelo facto de na sequência apresentada, haver uma das faces que tinha saído mais vezes; outro, também efectuado pelos alunos e englobado na mesma categoria advém da ordenação da sequência apresentada.

No caso dos raciocínios que levaram os alunos a escolher a resposta correcta, verificámos que 53 (46,1%) alunos no pré-ensino e 60 (52,2%) alunos no pós-ensino fundamentaram o seu raciocínio na equiprobabilidade de sair V ou F, como se exemplifica na Figura 96.

A probabilidade de sair frente ou verso sempre foi igual em todas a experiências e sempre será, o facto de ter saído muitas veses verso é mera coincidência, pois podia igualmente ter saído frente em cada uma das experiências em que saiu verso.

Figura 96. Resolução da questão 11 pelo aluno A58 no pré-ensino.

Verificámos também que 25 (21,7%) alunos no pré-ensino e 28 (24,4%) alunos no pós-ensino justificaram a sua opção no acaso, como podemos verificar na Figura 97.

é um acontecimento aleatório, tanto pode sair frente ou verso.

Figura 97. Resolução da questão 11 pelo aluno A61 no pré-ensino.

O raciocínio "aceite pela escola" foi referido por 13 (11,3%) alunos no pré-ensino e 8 (7%) alunos no pós-ensino. No exemplo apresentado na Figura 98 podemos verificar que o aluno justifica a sua opção fazendo alusão à lei dos grandes números.

lançando uma moeda ao ar é igualmente provável sair F ou V, uma vez que $p(F) = \frac{1}{2}$ e $p(V) = \frac{1}{2}$, o facto de ter saído em 6 lançamentos 5 V e 1 F, é apenas uma coincidência. Com um nº maior de lançamentos a $p(F)$ e $p(V)$ vão se aproximar da igualdade.

Figura 98. Resolução da questão 11 pelo aluno A49 no pós-ensino.

Nas opções erradas dos alunos verificámos que 17 (14,8%) alunos no pré-ensino e 10 (3,7%) alunos no pós-ensino optaram pela opção "É mais provável sair a face verso", baseando o seu raciocínio na categoria "propriedades da sequência". Considerar que a moeda está viciada, com base na frequência com que a face Verso saiu na sequência apresentada no enunciado da questão, foi a conclusão retirada por 4 (3,5%) alunos no pré-ensino e 1 (0,9%) aluno no pós-ensino (ver Figura 99).

Pq nas experiências realizadas saiu mais vezes Verso que Frente, logo o dado está viciado, logo a probabilidade de sair Verso é maior quanto + lançamentos fizermos.

Figura 99. Resolução da questão 11 pelo aluno A_{95} no pós-ensino.

Ainda a partir do número de vezes que a face Verso saiu, mas sem concluir que a moeda estava viciada, 10 (8,7%) alunos no pré-ensino e 9 (7,8%) alunos no pós-ensino consideraram que o facto de ter saído mais vezes a face V aumenta a probabilidade de sair de novo essa face (ver Figura 100).

É mais provável sair novamente a face verso, pois em 6 lançamentos apenas saiu uma vez a face frente e saiu 5 vezes a face verso. Então é mais provável que volte a sair a face verso.

Figura 100. Resolução da questão 11 pelo aluno A_{95} no pré-ensino.

Considerar "mais provável sair a face frente" foi a opção seleccionada por 2 (1,7%) alunos no pré-ensino e por 4 (3,5%) alunos no pós-ensino. A justificação para a escolha realizada foi mais uma vez baseada na sequência apresentada e na frequência com que cada uma das faces tinha surgido, como podemos verificar na Figura 101.

À medida que se faz mais lançamentos a probabilidade de sair F é maior porque p(F) tende a ser igual a p(V).

Figura 101. Resolução da questão 11 pelo aluno A_{73} no pós-ensino.

Como podemos verificar, o aluno considera mais provável que no próximo lançamento saia a face F para que a sequência tenda a ficar com um igual número de faces F e V. Neste caso, o aluno afirma a estabilização das frequências relativas ao fim de um pequeno número de experiências, ou seja, aderiu à "lei dos pequenos números" na terminologia de Tversky, (1971)

Finalmente, 7 (6,1%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer justificação para a opção escolhida.

4.1.12. Questão 12

12. Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?
☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos.
☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos.
☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.
Explica o raciocínio que usaste.

Nesta questão pretendíamos estudar a influência da "Falácia da Conjunção" (Tversky & Kahneman, 1983) nos julgamentos de probabilidade efectuados pelos alunos. Este raciocínio falacioso consiste em afirmar que a intersecção de dois acontecimentos é mais provável do que qualquer um deles tomados individualmente. Segundo Tversky e Kahneman o erro resulta de considerar a conjunção como mais representativa da população geradora que cada acontecimento em separado, ou do facto de que a conjunção induz as pessoas a imaginar mais exemplos que verificam a situação por ela determinada do que por cada acontecimento individual. Na Tabela 13 apresentam-se as respostas dos alunos a esta questão.

Tabela 13 – Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 12

	Questão 12	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Um português teve um ou mais ataques cardíacos.	59 (51,3%)	61 (53,1%)
Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos.	41 (35,7%)	40 (34,8%)
Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.	10 (8,7%)	12 (10,4%)
Não respondentes	5 (4,3%)	2 (1,7%)

A resposta correcta a esta questão resulta de seleccionar a opção "Um português teve um ou mais ataques cardíacos".

Pela Tabela 13, podemos verificar que 59 (51,3%) alunos no pré-ensino e 61 (53,1%) alunos no pós-ensino responderam correctamente a esta questão, o que corresponde a um aumento de duas respostas correctas (1,8%).

Os raciocínios que conduziram os alunos à resposta correcta foram categorizados em dois tipos: num raciocínio considerou-se que o acontecimento elementar é mais amplo do que a conjunção dos acontecimentos, donde ser maior a probabilidade associada ao primeiro; no outro raciocínio considerou-se que o acontecimento conjunto está incluído no acontecimento elementar, donde ser menor a probabilidade associada ao primeiro.

De entre os alunos que responderam correctamente, 40 (34,8%) alunos no pré-ensino e 40 (34,8%) alunos no pós-ensino justificaram a sua opção no facto de o acontecimento elementar ser mais amplo do que do acontecimento conjunto (ver Figura 102).

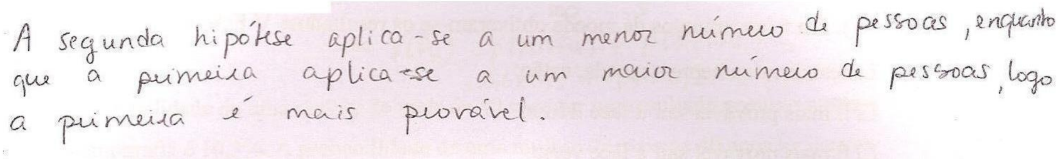
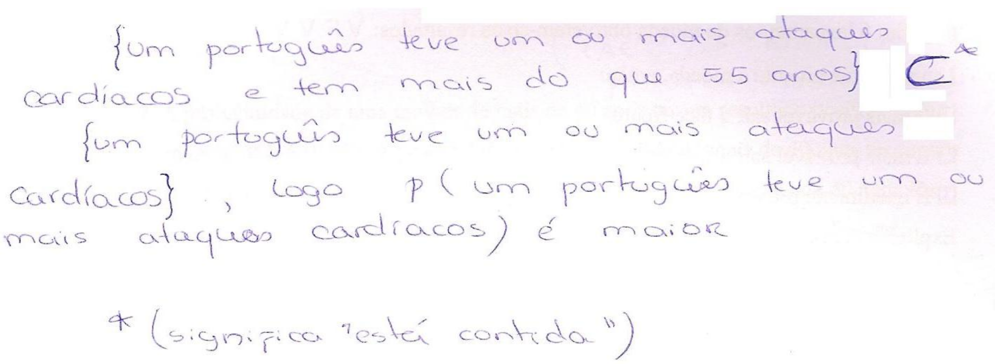

A segunda hipótse aplica-se a um menor número de pessoas, enquanto que a pimeira aplica-se a um maior número de pessoas, logo a pimeira é mais provável.

Figura 102. Resolução da questão 12 pelo aluno A49 no pré-ensino.

Considerar que a probabilidade do acontecimento conjunto é menor do que as probabilidades dos acontecimentos elementares, baseado no facto do acontecimento elementar conter o acontecimento conjunto, foi o raciocínio referido por 15 (13,0%) alunos no pré-ensino e por 15 (13,0%) alunos no pós-ensino (ver Figura 103).


{um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos} $\subset^*$ {um português teve um ou mais ataques cardíacos}, logo p(um português teve um ou mais ataques cardíacos) é maior

* (significa "está contida")

Figura 103. Resolução da questão 12 pelo aluno A47 no pré-ensino.

No pós-ensino verificaram-se ainda duas situações diferentes: 3 (2,6%) alunos justificaram a opção no facto de que nos acontecimentos elementares existem menos restrições e que isso leva a um aumento do valor da probabilidade; 1 (0,9%) aluno justificou a sua escolha nos valores apresentados no quadro do exercício 4, uma vez que os acontecimentos que esta questão apresentava também implicavam pessoas com mais de 55 anos e com ataques cardíacos.

Por fim, 4 (3,5%) alunos no pré-ensino e 2 (1,7%) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer tipo de justificação para explicarem a escolha da resposta correcta.

A segunda opção, considerar que o valor da probabilidade conjunta é maior do que o valor das probabilidades simples e que traduz a "falácia da conjunção", foi seleccionada por 41 (35,7%) alunos no pré-ensino e por 40 (34,8%) alunos no pós-ensino. Os raciocínios conducentes a esta escolha basearam-se na suposição de que uma pessoa com mais de 55 anos tem mais probabilidade de ter um ataque cardíaco, como se ilustra ver na Figura 104.

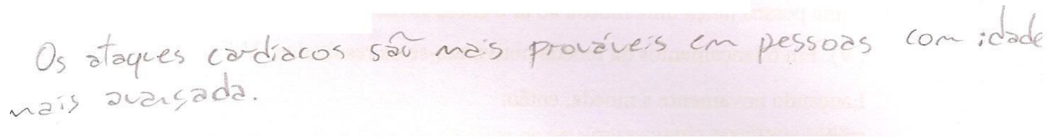

Os ataques cardíacos são mais prováveis em pessoas com idade mais avançada.

Figura 104. Resolução da questão 12 pelo aluno A64 no pré-ensino.

Nesta opção 2 (1,7%) alunos no pós-ensino justificaram a sua opção nos dados da tabela do exercício 4, tal como já havia acontecido com alunos que seleccionaram opção correcta, e ainda 1 (0,9%) aluno, também no pós-ensino, que apresente um raciocínio incoerente com a opção seleccionada.

Finalmente, 5 (4,4%) alunos no pré-ensino e 6 (5,2%) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer justificação para explicar a escolha efectuada.

A terceira opção – "Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis" – foi seleccionada por 10 (8,7%) alunos no pré-ensino e por 12 (10,4%) alunos no pós-ensino. A justificação conducente a esta resposta parece ter sido baseada, para 5 (4,3%) alunos no pré-ensino e para 8 (6,9%) alunos no pós-ensino, numa desadequada interpretação do enunciado, como podemos verificar na Figura 105.

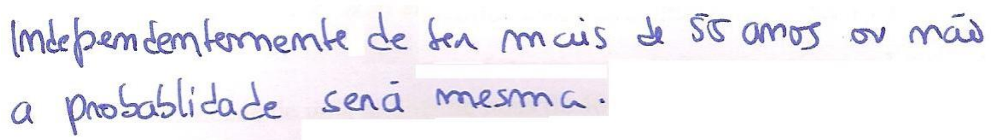

Indepemdemtemente de ter mais de 55 anos ou não a probablidade será mesma.

Figura 105. Resolução da questão 12 pelo aluno A97 no pré-ensino.

O aluno considera que a probabilidade é a mesma independentemente de a pessoa ter mais de 55 anos, o que não corresponde ao que era perguntado, pois uma das opções referia-se aos portugueses (de qualquer idade) que tinham tido um ou mais ataques cardíacos e a outra restringia-se aos portugueses com mais de 55 anos.

No pré-ensino 1 (0,9%) aluno justificou a sua escolha referindo a falta de dados para poder tomar uma opção mais consistente, como podemos verificar na Figura 106.

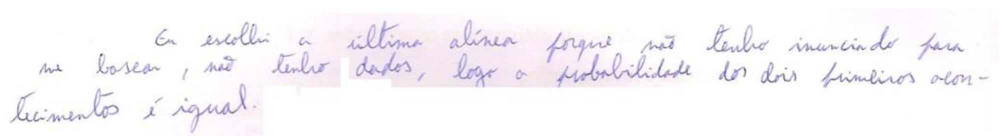

Eu escolhi a última alínea porque não tenho enunciado para me basear, não tenho dados, logo a probabilidade dos dois primeiros acon-tecimentos é igual.

Figura 106. Resolução da questão 12 pelo aluno A42 no pré-ensino.

Por último verificou-se que 4 (3,5%) alunos no pré-ensino e 4 (3,5%) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer justificação para explicar a sua escolha.

4.1.13. Questão 13

13. Um teste de diagnóstico de cancro foi administrado a todos os residentes de uma grande cidade onde há poucos casos de cancro. Um resultado positivo no teste é indicativo de ter cancro e um resultado negativo é indicativo de ausência de cancro. O que é mais provável? ☐ Que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo. ☐ Que o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro. ☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis. Explica o raciocínio que usaste.

Esta questão tinha como objectivo o estudo da "falácia da condicional transposta", salientando-se a assimetria inferencial no sentido das causas para os efeitos relativamente ao sentido inverso. Falk (1986) sugere que muitos alunos não descriminam adequadamente entre as duas direcções da probabilidade condicionada $p\left(A/B\right)$ e $p\left(B/A\right)$ e denominou este erro de "Falácia da condicional transposta".

Na tabela 14 estão registados a respostas apresentadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 14 — Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 13

	13	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo	10 (8,7%)	5 (4,3%)
Que o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro	35 (30,4%)	34 (29,6%)
Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis	67 (58,3%)	72 (62,6%)
Não respondentes	3 (2,6%)	4 (3,5%)

A resposta correcta a esta questão era considerar que "o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro", pois a o acontecimento "teste positivo" é a consequência e o acontecimento "ter cancro" é a causa.

Analisando as respostas dadas pelos alunos, verificamos que 67 (58,3%) alunos no pré-ensino e 72 (62,6%) alunos no pós-ensino consideraram que os dois acontecimentos tinham a mesma probabilidade de ocorrer, não identificando a relação de causa-efeito existente entre os dois acontecimentos (ver Figura 107).

caso o teste seja infalível, os acontecimentos são equiprováveis, já que o teste dá positivo se tiver cancro, e a pessoa terá cancro se der positivo.

Figura 107. Resolução da questão 13 pelo aluno A_{31} no pré-ensino.

Verificámos ainda que, no pós-ensino, 3 (2,6%) alunos justificaram esta opção utilizando a fórmula da probabilidade condicionada, como podemos ver na Figura 108.

Uma pessoa ter cancro – A
teste positivo – B

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

$A = B$

$$\text{logo} \quad \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Figura 108. Resolução da questão 13 pelo aluno A_{38} no pós-ensino.

Como se pode verificar na resolução apresentada, o aluno admitiu implicitamente que as probabilidades dos acontecimentos "uma pessoa ter cancro" e "resultado positivo no teste" são iguais, pelo que ao aplicar a fórmula da probabilidade condicionada conclui pela igualdade.

Verificámos também que 10 (8,7%) alunos no pré-ensino e 5 (4,3%) alunos no pós-ensino consideraram como mais provável "que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo", confundindo claramente a causa com o efeito, como podemos verificar na justificação apresentada pelo aluno A_2 no pré-ensino (ver Figura 109).

Se o teste diagnóstico deu positivo, a pessoa tem cancro.

Figura 109. Resolução da questão 13 pelo aluno A_2 no pré-ensino.

A resposta correcta a esta questão implica a correcta interpretação dos acontecimentos causa e efeito, e foi indicada por 35 (30,4%) alunos no pré-ensino e 34 (29,6%) alunos no pós-ensino. A justificação dada pelos alunos para a escolha desta opção de resposta assentou no reconhecimento da relação de causa-efeito, considerando que o acontecimento "ter cancro" é a causa para que o teste dê positivo, como se exemplifica na Figura 110, em que o aluno A70 considera que se a pessoa "tem cancro, o teste tem de dar positivo".

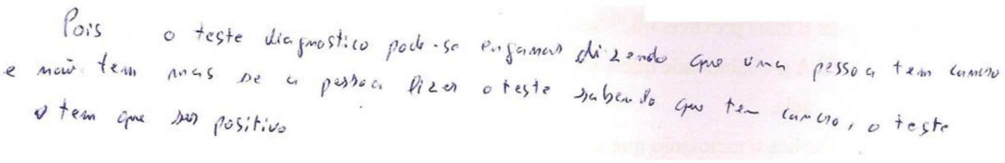


Figura 110. Resolução da questão 13 pelo aluno A70 no pós-ensino.

Salienta-se ainda que 2 (1,7%) alunos no pós-ensino utilizaram a fórmula da probabilidade condicionada para justificar a opção seleccionada, como podemos verificar na Figura 111, onde o aluno A70 compara a grandeza entre as probabilidades dos acontecimentos simples para concluir o valor das probabilidades condicionadas.

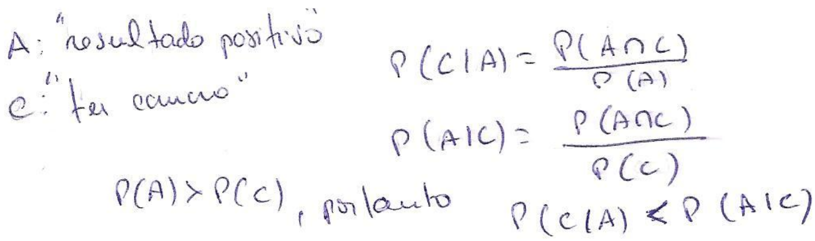


Figura 111. Resolução da questão 13 pelo aluno A13 no pós-ensino.

Por último, 21 (18,3%) alunos no pré-ensino e 21 (18,3) alunos no pós-ensino não apresentaram qualquer justificação para seleccionarem a resposta correcta efectuada.

4.1.14. Questão 14

14. Supondo que é igual a proporção de mães e filhas com olhos azuis, qual dos acontecimentos seguintes é o <u>mais</u> provável?
☐ Que uma rapariga tenha olhos azuis, se a sua mãe tem olhos azuis.
☐ Que uma mãe tenha olhos azuis, se a sua filha tem olhos azuis.
☐ Os dois anteriores acontecimentos são igualmente prováveis.
Explica o raciocínio que usaste.

Nesta questão pretendia-se também avaliar a assimetria inferencial a partir da relação causa-efeito entre dois acontecimentos, pois a "mãe ter olhos azuis" é visto como causa da "filha ter olhos azuis".

Quando se estuda uma probabilidade condicionada P (A/B) há que considerar duas relações diferentes entre o acontecimento A (acontecimento condicionado) e B (acontecimento condicionante). Se no contexto se percebe que B é uma causa de A, está a estabelecer-se uma relação causal, mas se no contexto se percebe A como causa de B, está a estabelecer-se entre A e B uma relação diagnóstica. Nesta questão, se os alunos considerarem como efeito “a filha tem os olhos azuis” (A) e como causa “a mãe tem olhos azuis” (B), ao escolherem a primeira opção estão a estabelecer uma relação causal, mas ao escolherem a segunda opção estão a estabelecer uma relação diagnóstica. Apesar dos acontecimentos correspondentes às duas opções terem a mesma probabilidade, eles não são apercebidos pelos alunos como tal.

Na Tabela 15 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 15 – Respostas, em frequência absoluta (percentagem), dos alunos à questão 14

	14	
Respostas	Pré-ensino	Pós-ensino
Que uma rapariga tenha olhos azuis, se a sua mãe tem olhos azuis.	53 (46,1%)	58 (50,4%)
Que uma mãe tenha olhos azuis, se a sua filha tem olhos azuis.	6 (5,2%)	6 (5,2%)
Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.	54 (47,0%)	46 (40,0%)
Não respondentes	2 (1,7%)	5 (4,4%)

Analisando as respostas dadas pelos alunos verificamos que 53 (46,1%) alunos no pré-ensino e 58 (50,4%) alunos no pós-ensino optaram pela relação causal. As justificações que os alunos apresentaram para a escolha efectuada assentam em duas assimetrias possíveis: na “assimetria mãe-filha”, afirmada por 36 (31,3%) alunos no pré-ensino e 37 (32,2%) alunos no pós-ensino, refere-se que “a rapariga depende da mãe…”, “a hereditariedade é lógica, a mãe implica a filha…” (ver Figura 112); e na “assimetria mãe-filha-pai”, afirmada por 6 (5,2%) alunos no pré-ensino e 8 (7,0%) alunos no pós-ensino, refere-se que “a filha pode ter olhos azuis do pai…” (ver Figura 113).

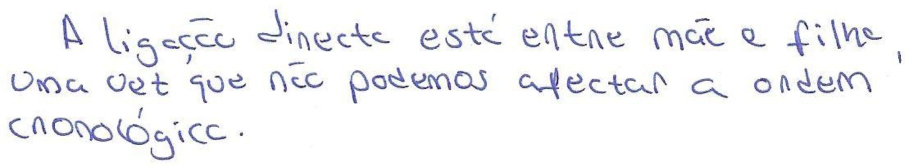


Figura 112. Resolução da questão 14 pelo aluno A30 no pós-ensino.

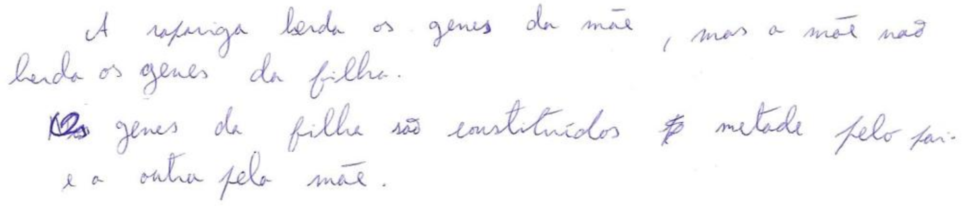


Figura 113. Resolução da questão 14 pelo aluno A42 no pós-ensino.

Verificamos ainda que apenas 6 (5,2%) alunos no pré-ensino e igualmente 6 (5,2%) alunos no pós-ensino optaram para relação diagnóstica entre os acontecimentos A e B, considerando que o facto da "filha ter olhos azuis não pode afectar a cor dos olhos da mãe", como podemos verificar na Figura 114, onde se apresenta a resolução proposta pelo aluno A17 no pré-ensino.

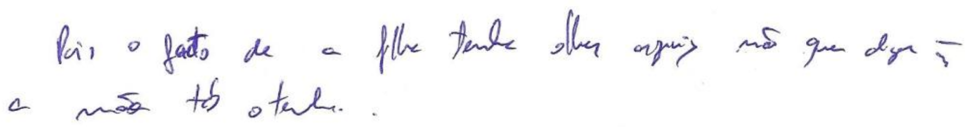


Figura 114. Resolução da questão 14 pelo aluno A17 no pré-ensino.

Quanto aos alunos que responderam correctamente a esta questão, salienta-se o facto de ter sido seleccionada por 54 (47,0%) alunos no pré-ensino e 46 (40,0%) alunos no pós-ensino, o que corresponde a uma diminuição de 8 (7,0%) alunos do pré-ensino para o pós-ensino.

Nesta opção 4 (3,5%) alunos no pós-ensino recorreram à formula da probabilidade condicionada para justificar a opção escolhida, conforme podemos verificar na Figura 115, onde se apresenta a resolução do aluno A14 no pós-ensino.

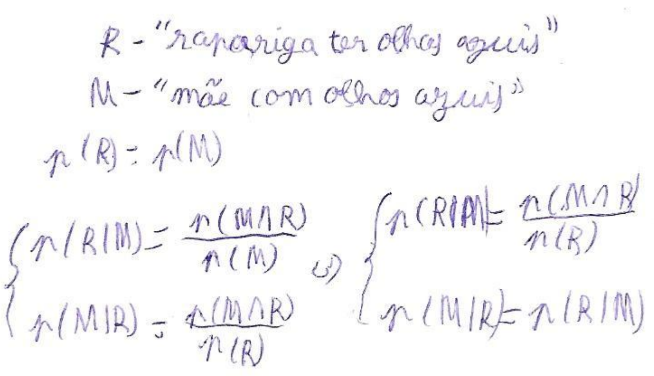


Figura 115. Resolução da questão 14 pelo aluno A14 no pós-ensino.

Como podemos verificar, o aluno considerou a probabilidade da rapariga ter olhos Azuis igual à probaililidade da mãe ter olhos azuis, para concluir que as probabilidades condicionadas são iguais uma vez que a probabilidade de $A \cap B$ é igual à probabilidade de $B \cap A$.

Verificamos ainda que 41 (35,7%) alunos no pré-ensino e 34 (29,6%) alunos no pós-ensino justificam a opção efectuada correctamente pelo facto da proporção de Mães e Filhas ser a mesma, pelo que concluem que a probabilidade é igual, como podemos verificar na Figura 116, onde se apresenta a resolução do aluno A_{91} no pré-ensino.

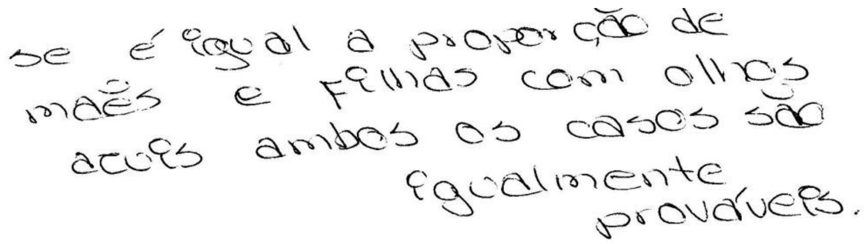


Figura 116. Resolução da questão 14 pelo aluno A_{91} no pré-ensino.

Finalmente, verificou-se, que no pré-ensino 11 alunos na opção a) 4 alunos na opção b) e 13 alunos na opção c) totalizando 28 (24,3%) alunos não apresentaram qualquer justificação para a escolha que efectuaram, já no pós-ensino a não justificação foi efectuada por 21 (18,3%) alunos distribuidos por 12 alunos na opção a), 1 aluno na opção b) e 8 alunos na opção c).

4.2. Impacto do ensino da probabilidade condicionada sobre as respostas

Para analisar a influência que o ensino teve nas respostas apresentadas pelos alunos, aplicámos o teste de McNemar para comparar as respostas do pré e pós-ensino. Este teste compara as proporções das respostas dicotomizadas de duas variáveis A e B. Utilizando uma tabela de contingência de 2x2, analisa a alteração do número de respostas correctas e incorrectas dadas pelos alunos no pré-ensino e no pós-ensino.

As Hipóteses a testar são:

H_0:p(incorrecta $\rightarrow$ correcta) = p(correcta $\rightarrow$ incorrecta)

H_a:p(incorrecta $\rightarrow$ correcta) $\neq$ p(correcta $\rightarrow$ incorrecta)

Na Tabela 16 apresentam-se o número de respostas que foram alteradas do pré-ensino para o pós-ensino e os valores de *p* obtidos pela aplicação do teste de McNemar em todas as questões do teste.

Tabela 16 — Alteração das respostas do pré-ensino para o pós-ensino e valor de p obtido no teste de McNemar nas várias perguntas do teste

Item	Alteração da resposta do pré-ensino para o pós-ensino		n	Valor de p
	incorrecta→correcta	correcta→incorrecta		
1a)	14	2	114	0,004**
1b)	20	4	112	0,002**
2)	8	4	99	0,388
3a)	19	4	114	0,003**
3b)	19	4	74	0,003**
4a)	6	2	115	0,289
4b)	14	25	113	0,109
4c)	11	23	112	0,059
4d)	8	23	108	0,012*
5a)	13	10	110	0,678
5b)	19	10	107	0,137
6a)	17	17	110	1,000
6b)	14	4	99	0,031*
7	9	2	109	0,065
8	22	4	111	0,001**
9	20	13	76	0,296
10	21	2	78	0,000**
11	6	1	114	0,125
12	8	7	110	1,000
13	20	13	108	0,296
14	10	16	109	0,327

Nota: * diferenças estatisticamente significativas para $p < 0{,}05$; ** diferenças estatisticamente significativas para $p < 0{,}01$.

Observando a Tabela 16 verifica-se que, do pré-ensino para o pós-ensino, na maioria das questões foi maior o número de respostas que passaram de incorrectas a correctas do que de correctas a incorrectas. Especificamente, isso aconteceu nas questões 1a), 1b), 2, 3a), 3b), 4a), 5a), 5b), 6b), 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. De entre estas questões, a aplicação do teste de MCNemar determinou diferenças estatisticamente significativas nas questões 1a), 1b), 3a), 3b), 8) e 10), para $p < 0{,}01$, e na questão 6b), para $p < 0{,}05$.

Nas restantes questões verifica-se um igual número de alteração das respostas na questão 6a) e um maior número de respostas que passaram de correctas a incorrectas do que de incorrectas a correctas nas questões 4b), 4c), 4d) e 14. De entre estas questões, a aplicação do teste de McNemar determinou diferenças estatisticamente significativas apenas no caso da questão 4d), para $p < 0{,}05$.

Considerámos, de seguida, o número total de respostas correctas obtidas por cada aluno em todas as questões do teste, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, e aplicámos aos resultados obtidos o teste t de Student para amostras emparelhadas. Em termos do número de respostas correctas dadas pelos alunos, verificou-se um aumento do número de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino em 68 (59,1%) alunos. Da aplicação do teste t, obtivemos para médias das respostas correctas dadas pelos alunos no pré-ensino e no pós-ensino, respectivamente, os valores 10,2 e 11,2. Estes valores da média, apesar de não traduzirem uma grande variação do número de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino, revelaram-se estatisticamente significativos para $p < 0{,}01$.

Seguidamente estudámos também a influência do ensino nas questões consideradas contra-intuitivas, dado que a investigação tem mostrado que nessas situações o ensino regular tem um menor impacto na alteração das ideias dos alunos (e.g., Fernandes, 1990; Fischbein & Schnarch, 1997). Incluímos nas situações contra-intuitivas as questões 6b), 7), 11), 12), 13) e14) e determinámos, de seguida, o número total de respostas correctas dos alunos nessas questões, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, e aplicámos aos valores obtidos o teste t para amostras emparelhadas. Da análise ao número de respostas correctas nestas questões verificámos que, do pré-ensino para o pós-ensino, aumentou o número de respostas correctas em 40 (34,8%) alunos, diminuiu o número de respostas correctas em 25 (21,3%) alunos e manteve-se o número de respostas nos dois momentos em estudo em 50 (43,5%) alunos. Da aplicação do teste t, obtivemos para médias das respostas correctas dadas pelos alunos no pré-ensino e no pós-ensino, respectivamente, os valores 2,1 e 2,3. Neste caso, a diferença de médias não se revelou estatisticamente significativa ($p = 0{,}094$). No caso das questões consideradas não contra-intuitivas, que correspondem às restantes questões, obtiveram-se para valores das médias do número de respostas correctas 8,1 e 8,9, respectivamente no pré-ensino e no pós-ensino. A aplicação do teste t de Student para amostras emparelhadas determinou diferenças estatisticamente significativas ($p < 0{,}01$).

Por fim, estudámos a influência da variável "professora" (que tomou os valores professor A e professor B, correspondentes às duas professoras de Matemática que leccionaram os conceitos de probabilidade condicionada e independência aos alunos) no número de respostas correctas obtidas pelos alunos no teste realizado no pós-ensino. Para tal, efectuamos uma análise de co-variância (Ancova) considerando para variável dependente o número de respostas correctas dadas pelos alunos no pós-ensino, como factor as variável "professor" e como *covariate* o número de respostas correctas dadas pelos alunos no pré-ensino. Na Tabela 17 apresentam-se as estatísticas descritivas (média e desvio padrão) do número de respostas correctas obtidas pelos alunos no pré-ensino e no pós-ensino.

Tabela 17 — Média e desvio padrão do número de respostas correctas dos alunos no pré-ensino e no pós-ensino, segundo a variável professor

	Pré-ensino			Pós-ensino		
Professora	Média	Desvio padrão	N	Média	Desvio padrão	N
Professora A	10.9	2.94	73	11,9	3,44	73
Professora B	8.8	3.18	42	9,9	3,34	42
Total	10.1	3.18	115	11,2	3,53	115

Depois de confirmada a igualdade de variâncias, através do teste de Levene ($p = 0{,}584$), a análise de co-variância determinou diferenças estatisticamente significativas na variável covariate ($F = 76{,}740$; $p < 0{,}01$) e não determinou diferenças estatisticamente significativas no factor professor ($F = 0{,}905$; $p = 0{,}343$).

4.3. O ensino do tema de probabilidade condicionada

O conceito de probabilidade condicionada, objecto do presente estudo, foi leccionado por duas professoras, Ana e Berta, ao longo de duas aulas, cada uma constituída por um bloco de 90 minutos. A professora Ana leccionou o conceito em três turmas do 12º ano e a professora Berta em duas turmas do 12º ano e a investigadora observou as duas aulas em cada uma das turmas das professoras.

Globalmente, o ensino desenvolvido pelas duas professoras foi idêntico. Na primeira aula, as professoras começaram por introduzir o conceito de probabilidade condicionada de forma formal, seguindo-se a resolução de exercícios e problemas, propostos pelas professoras, para consolidação do conceito. Na segunda aula foi introduzido, também de forma formal, o conceito de acontecimentos independentes, seguindo-se também a resolução de exercícios e problemas, propostos pelas professoras, para consolidação dos conceitos de independência e de probabilidade condicionada.

4.3.1. O ensino da professora Ana

A professora Ana leccionou o tema em três turmas, A, B e C, tendo utilizado a mesma abordagem em todas elas, pelo que a descrição que passamos a efectuar foi a registada na turma A.

Ana deu início à aula começando por ditar e registar o sumário, referindo qual a temática que ia ser leccionada. Após os alunos terem registado o sumário, a professora deu início à aula salientando: *vamos ver agora a probabilidade condicionada*, e pediu aos alunos para registarem no caderno o exercício seguinte.

> Uma empresa decidiu abrir uma nova filial. Pretende recrutar um gerente com um perfil de um funcionário competente (nível Bom na última avaliação de desempenho). Na última avaliação de desempenho foram registados os seguintes dados:

		Homem (H)	Mulher (M)	
Competência	Razoável (R)	40	17	57
	Bom (B)	11	7	18
		51	24	75

> Devido à zona de implementação da filial, a gerência decidiu que o cargo de gerente seria para uma mulher.
> Escolhido um funcionário ao acaso, qual a probabilidade de ser promovido a futuro gerente?"

Após ter ditado o exercício, a professora deu início à resolução questionando os alunos sobre qual seria a probabilidade de ser promovido a gerente.

P — ... é .... 7 em 24. A probabilidade de ser promovida a gerente é: $p(\text{ser promovido a gerente}) = 7/24$.

P — $\dfrac{7}{24}$ é a mesma coisa que escrever $\dfrac{7/75}{24/75}$, porquê?

A — O 75 corta.

P — E o que é $\dfrac{24}{75}$? É o quê?

A — É a probabilidade de ser mulher... é B.

P — O que dá $\dfrac{p(B \cap M)}{p(M)}$? (Silêncio)

P — Eu vou já ditar a definição, mas primeiro vamos ver... é a probabilidade de ser Bom sabendo que é mulher.

De seguida, a professora pediu aos alunos que registassem no caderno a definição:

Sendo A e B dois acontecimentos, chama-se probabilidade de A condicionada por B à probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B.

Ao mesmo tempo que ditava a definição, Ana registou no quadro a fórmula da probabilidade condicionada: $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, $p(B)\neq 0$.

Ainda no quadro, e com a ajuda dos alunos, desenvolveu a fórmula da probabilidade condicionada, tendo concluído que $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A\cap B)=p(B)\times p(A/B)$ e informado os alunos da leitura que deviam efectuar: *É a probabilidade de A sabendo que B ocorreu, ou então A se B*.

P — Claro que se tiverem $p(B/A)$ fica $\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$ *agora com* $p(A)\neq 0$.

Terminada a apresentação da fórmula da probabilidade condicionada, a professora questionou os alunos se havia dúvidas e como nenhum aluno se manifestou, informou que iam resolver exercícios. Para tal, pediu para abrirem o manual escolar na página 43 e resolver o exercício nº 51.

Exercício 51
A figura representa um saco com 6 bolas: 3 vermelhas, 2 pretas e 1 azul, tal como a figura ilustra.
Retira-se uma bola ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: “sair bola preta”;
B: “sair número ímpar”.
51.1. Indica, justificando, o valor de:
51.1.1. $p(B/A)$;
51.1.2. $p(A/B)$.

51.2. Introduziu-se no saco uma bola com o número 7. Qual a cor da bola, sabendo que a probabilidade de sair bola azul, dado que saiu um número impar, passa a ser de 50%? Justifica.

Os alunos foram resolvendo individualmente os exercícios e a professora foi circulando pela sala verificando as dificuldades por eles sentidas. Como podemos verificar no seguinte diálogo:

P — A probabilidade de sair ímpar sabendo que saiu preta é?.. Espera todas as ímpares são pretas.
A — Logo é 1.
P — E isso é ...
A — Um acontecimento certo.

Em voz alta a professora comentou: quando escrevem $p(B/A)$, $B \cap A$ significa ímpar e bola preta, ou então podiam ver logo que é 1 porque todas são pretas e aí tinham que justificar. Se fizeram cálculos tudo bem, senão têm que justificar.

Um aluno foi ao quadro corrigir o exercício 51.1.1., tendo-o resolvido aplicando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{2/6}{2/6} = 1.$$

De seguida corrigiu o exercício 51.1.2. aplicando de novo a fórmula da probabilidade condicionada.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Passaram de seguia à resolução da alínea 51.2. Novamente a professora foi realçando a necessidade de os alunos justificarem os raciocínios efectuados destacando que caso aplicassem a fórmula da probabilidade condicionada não teriam de apresentar cálculos.

P — Ora bem, foi introduzida uma bola e essa bola tem o número 7 Só não sabemos é a cor.
A — Neste exercício sei fazer de cabeça, mas não sei como fazer.
P — É assim, no exame podemos fazer das duas maneiras, mas se fizerem de cabeça têm de explicar.

De seguida resolveu o exercício aplicando a fórmula da probabilidade condicionada, e reforçando que *podem resolver por raciocínio, mas então têm de explicar.*

Resolução proposta pela professora para este exercício:

$$0,5 = \frac{p(C \cap B)}{4/7} \Leftrightarrow p(C \cap B) = 0,5 \times \frac{4}{7}.$$

Enquanto ia resolvendo o exercício, a professora foi estabelecendo com os alunos o seguinte diálogo:

P — Isto é o que representa $p(B)$, é a probabilidade de “ser número impar”. Quantas bolas têm agora?
A — 7.
P — E quantas ímpares? (silêncio)

P — $p(C \cap B)=\frac{2}{7}$. Isto quer dizer que a probabilidade de ser ímpar e azul é 2 em 7, o que significa que tenho de ter duas bolas azuis.

Concluída a resolução do exercício, e dado nenhum aluno ter apresentado dúvidas, a professora pediu aos alunos para resolverem o exercício 53.

Exercício 53:
De dois acontecimentos A e B, associados a uma mesma experiência, sabe-se que:
$p(A)=0,3$;
$p(B)=0,6$;
$p(A \cup B)=0,9$.
53.1. Indica, justificando, se A e B são ou não incompatíveis.
53.2. Calcula:
53.2.1. $p(A/B)$;
53.2.2. $p(\overline{A}/\overline{B})$."

A professora deixou de novo os alunos resolverem individualmente a questão, tendo verificado junto deles as suas dificuldades. Aproveitou sempre os erros cometidos por estes em conceitos anteriores para os esclarecer e relembrar.

P — O que são acontecimentos incompatíveis?
A — A probabilidade é zero.
P — Então vocês vão ter de mostrar... vocês têm de olhar para os dados que têm... vocês sabem a reunião, sabem A e B, então podem fazer... se der zero são incompatíveis, senão, não são.

Depois de os alunos resolverem o exercício individualmente, um aluno foi ao quadro apresentar à turma a resolução por ele efectuada no lugar, tendo esta resolução sido acompanhada pela professora e pelos colegas.

53.1.

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,9=0,3+0,6-p(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(A \cap B)=0,9-0,9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(A \cap B)=0, \text{ logo são imcompatíveis.}$$

De seguida o aluno apresentou a sua proposta de resolução para a alínea seguinte

53.2.1

$$p(A/B)=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}=0 \quad .$$

Ainda o mesmo aluno resolveu no quadro a última alínea deste exercício.

53.2.2.

$$p(\overline{A}/\overline{B}) \underbrace{= \frac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(\overline{A\cup B})}{p(\overline{B})}}_{\text{A justificação deste passo são as Leis de De Morgan}}$$

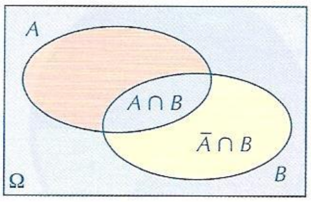
$$\underbrace{= \frac{1-p(A\cup B)}{1-p(B)}}_{\text{A justificação deste passo é a aplicação do acontecimento contrário}}$$

$$= \frac{1-0{,}9}{1-0{,}5} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

Continuando, a professora propôs agora aos alunos a resolução do exercício 54.

Exercício 54

Sejam A e B acontecimentos possíveis de uma mesma experiência aleatória. Mostra que $p\left(\overline{A}/B\right)+p\left(A/B\right)=1$.



Apesar de alguns alunos terem solicitado algum tempo para a tentar resolver esta questão sozinhos, a professora informou que seria resolvida por ela no quadro de imediato, dado tratar-se de uma demonstração, e apelou à sua atenção.

Enquanto resolvia a questão, a professora foi informando os alunos do método mais eficaz para resolver problemas deste tipo, tendo salientado que na resolução de uma demonstração o importante é provar que a afirmação é verdadeira, continuando a insistir na necessidade de justificar todos os passos que efectuarem na resolução do exercício.

A proposta de resolução da professora foi a seguinte:

$$p(\overline{A}/B)+p(A/B)=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}+\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(\overline{A}\cap B)+p(A\cap B)}{p(B)}.$$

Recordou aos alunos que, como se podia verificar na figura do enunciado do exercício, $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são incompatíveis, donde pelo axioma 2 a probabilidade da reunião é a soma das probabilidades, escrevendo no quadro:

$p[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)] = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$. Sendo esta a igualdade que está na fracção, podemos então escrever:

$$\underbrace{\frac{p[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)]}{p(B)} = \frac{p[B \cap (\overline{A} \cup A)]}{p(B)}}_{\text{aplicamos aqui a propriedade distribuitiva}} = \frac{p(B \cap \Omega)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

A professora reforçou aqui os conceitos teóricos que tinha utilizado para resolver o exercício e questionou os alunos acerca das dúvidas existentes. Como os alunos não manifestaram dúvidas, passou para a resolução do exercício 56 do manual escolar:

> Exercício 56
> Numa turma de 28 alunos há 8 raparigas e 10 rapazes que vão participar numa actividade desportiva. Nessa turma há um total de 15 rapazes. Escolhendo um aluno da turma ao acaso qual é a probabilidade de:
> 56.1. ser rapariga?
> 56.2. ser rapaz e não participar na actividade referida?
> 56.3. participar na actividade sabendo que é rapariga?
> 56.4. ser rapariga, sabendo que participa?

Para a resolução deste exercício, a professora sugeriu aos alunos que utilizassem uma tabela de contingência para escrever os dados do exercício e que começassem por definir os acontecimentos: ser rapariga*;* ser rapaz*;* participar*;* não participar. A professora resolveu o problema no quadro, solicitou a ajuda dos alunos e foi registando:

> H: ser rapaz; F: ser rapariga; P: participa na actividade desportiva; $\overline{P}$: não participa na actividade desportiva.
> P — Vamos elaborar agora uma tabela para colocar os dados.
> Há oito raparigas que participam, onde vamos colocar?
> Há 10 rapazes que participam....
> São 15 rapazes, aqui são 5, a turma tem 28 alunos.... agora podem acabar a tabela.

	P	$\overline{P}$	Total
H	10	5	15
M	8	5	13
Total	18	10	28

A professora continuou a resolução do exercício, esclarecendo os alunos acerca dos conceitos necessários à resolução e salientando sempre a necessidade de traduzir em linguagem matemática a linguagem corrente, como podemos verificar no seguinte diálogo estabelecido com um aluno.

P — Como se traduz a probabilidade de ser rapaz e não participar?
A — Sabendo.
P — Não! É preciso ter atenção, é "e" e não é "sabendo". Têm de ter cuidado com isso. Agora que já está, podem fazer $p(M \cap \bar{P}) = \frac{5}{28}$.
A — Oh professora, é só isto?
P — Agora façam a alínea seguinte. Como estão a ver, agora é que é a probabilidade de participar sabendo que é rapariga. Ora temos 8 em 13 raparigas, ou aplicando a fórmula temos:

$$p(P/F) = \frac{p(P \cap F)}{p(F)} = \frac{8/28}{13/28} = \frac{8}{13}$$

Vamos agora fazer a alínea seguinte. Agora queremos a probabilidade de ser rapariga sabendo que participa:

$$p(F/P) = \frac{p(F \cap P)}{p(P)} = \frac{8/28}{18/28} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Como é que podiam ver directamente? Muitas vezes no exame pedem para traduzir: $p(F/P)$ é a probabilidade de ser rapariga sabendo que participa" e vocês podiam fazer logo directamente.

Como podemos verificar, houve a intenção da professora esclarecer a diferença entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta, referindo a não necessidade do recurso constante à fórmula para resolver as questões da probabilidade condicionada.

A aula prosseguiu com a resolução do exercício 57.

Exercício 57
Numa escola, no 10º ano, inscreveram-se 56 alunos nos cursos gerais e 78 nos cursos tecnológicos. Sabe-se que 50% das raparigas inscreveram-se em cursos tecnológicos e $\frac{3}{7}$ dos alunos dos cursos gerais são rapazes.
Seleccionou-se ao acaso um aluno do 10º ano.
57.1. Qual a probabilidade de ser um rapaz?
57.2. Qual a probabilidade de ser uma rapariga inscrita num dos cursos gerais?
57.3. Sabendo que é rapaz, qual a probabilidade de estar inscrito num curso tecnológico?

Para a resolução deste exercício, a professora lembrou aos alunos que deveriam começar por definir por uma letra os acontecimentos: *ser rapaz e ser rapariga e depois há os que frequentam os cursos tecnológicos, podem designar por T e os outros por G*. Depois de sugerir que elaborassem uma tabela de contingência para colocar os dados do exercício, foi esclarecendo os alunos das diferenças entre a probabilidade condicionada e a conjunta: *rapariga inscrita nos cursos gerais não é condicional* e *sabendo que é rapaz qual é a probabilidade de estar no tecnológico*. Dado que tocou, a professora deu a aula por terminada e solicitou aos alunos para terminarem em casa a resolução deste exercício.

Da segunda aula que a professora Ana reservou para estudar as probabilidades condicionadas, uma parte foi reservada para a resolução de exercícios de consolidação do conceito estudado na aula anterior e outra parte para estudar os acontecimentos independentes e para resolver exercícios esclarecedores do conceito.

Esta aula teve início com correcção do trabalho de casa, tendo os alunos revelado algumas dificuldades no preenchimento da tabela de contingência, como podemos observar pelo diálogo estabelecido entre o aluno que estava no quadro a corrigir, a professora e a turma.

No quadro o aluno escreveu:
A: "ser rapaz"; B: "ser rapariga"; G: "curso geral"; T: "curso Tecnológico", logo
$p(G \cap A) = \frac{3}{7}$ $\qquad$ $p(T \cap B) = \frac{1}{2}$

P — Domingos, não fizeste a tabela?

A — Faço já. (O aluno construiu então a tabela de contingência para escrever os dados do exercício).

	G	T	Total
A	24	46	70
B	32	32	64
Total	56	78	134

57.2. $p(B \cap G) = \frac{1}{2}$

Um aluno (situado ao fundo da sala) não concorda com os resultados expostos no quadro e afirma que *não dá* $\frac{1}{2}$*, dá* $\frac{70}{134}$. A professora concordou com o aluno, dizendo: *não sei onde foi buscar o* $\frac{1}{2}$, e o aluno reforçou a sua opinião quanto ao resultado $\frac{70}{134}$. Tendo-se apercebido que havia alunos que não tinham percebido a construção da tabela de contingência, a professora resolveu de novo este exercício e explicou a construção da tabela e os valores de algumas das probabilidades pedidas.

P — Depois de porem aqui o 24, fazem o acerto para os 56.
P — Depois diz que 50% dos alunos se inscreveram no curso tecnológico, logo voltem a acertar a tabela. Agora a probabilidade de ser rapaz é $\frac{70}{134}$. Depois diz

"uma rapariga inscrita nos cursos gerais" É rapariga e cursos gerais, logo $\frac{32}{134}$.

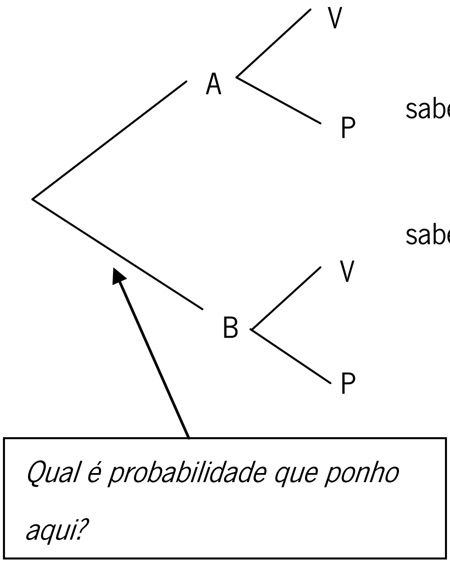
Depois diz "sabendo" é a probabilidade condicionada.

De seguida, a professora propôs aos alunos a resolução do exercício 58.

Exercício 58
Considera dois sacos A e B.
O saco A contém 2 bolas vermelhas e uma preta e o saco B contém 3 vermelhas e 2 pretas.
Escolhe-se ao acaso um dos sacos, donde se retira uma bola.
Determina a probabilidade de:
58.1. sair bola vermelha do saco A;
58.2. ter sido escolhido o saco B, dado que saiu bola preta.

A professora referiu que este exercício seria resolvido por ela no quadro pois envolvia um diagrama de árvore, assunto que os alunos ainda não tinham estudado.

P — Temos dois sacos, o A contém 2 bolas vermelhas e 1 preta e o B contém 3 vermelhas e 2 pretas. Vamos então fazer o diagrama de árvore
Vamos ver: temos o saco A e o saco B e depois temos Vermelhas em A e Pretas em A



Se eu pedisse a probabilidade de ser bola preta sabendo que saiu do saco A, é $\frac{1}{3}$.

Se eu quisesse a probabilidade de ser vermelha sabendo que saiu do saco B?

E se quisesse a probabilidade de V e A?

$p(V \cap A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ porque V está contido em A.

E vou-vos explicar porquê. Como sabemos, temos:

$$p(V/A) = \frac{p(V \cap A)}{p(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(V \cap A) = \underbrace{p(A)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{p(V/A)}_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Sempre que tivermos $V \cap A$ temos de multiplicar, e se tivermos V/A é directo. Se eu pedir para calcular a probabilidade de, por exemplo, Preta e de B, ficava $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}$.

A — Eu só não percebo o 58.2.

P — Pois não, eu vou explicar. Ora lê a questão (o aluno leu o enunciado do exercício). Como indica, probabilidade de B sabendo que saiu Preta. Se fosse ao contrário era directo, aqui não é directo, tem que se usar a definição.

$$p(B/P) = \frac{p(B \cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{p(P \cap A) + p(P \cap B)} =$$

P- – Como vamos calcular a probabilidade de ser preta?
É que pode ser preta de A ou preta e de B.

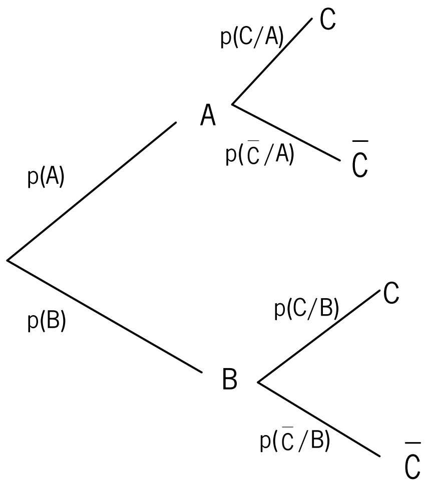
Tem de se ter cuidado. Se quero $p\left(P/B\right)$ é directo, se quero $p\left(B/P\right)$ tem que se usar a definição.

A professora prosseguiu então os cálculos, registando no quadro os valores encontrados.

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{p(P \cap A) + p(P \cap B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}} = \frac{1/5}{11/30} = \frac{6}{11}$$

Por fim, a professora elaborou o seguinte esquema para resumir a construção de um diagrama de árvore.



E explicou:

P — Se eu quiser $p(C/A)$ é directo, se quiser $p(C\bigcap A)$ tem de se multiplicar.
A — $p(A/C)$ é o contrário do que deu?
P — O contrário não... é o uso da fórmula.

Passou-se, de seguida, à resolução do exercício 59.

Exercício 59
A probabilidade da Márcia ir ai cinema no próximo domingo é de 40%. Sabe-se que a probabilidade de a Márcia ir ao cinema se chover é de 70% e a probabilidade de chover é de 20%. Determina a probabilidade de:
59.1. chover e a Márcia ir ao cinema;
59.2. não chover e a Márcia ir ao cinema.
59.3. a Márcia ir ao cinema sabendo que não choveu.

Para a resolução desta questão, a professora, com a ajuda dos alunos, construiu um diagrama de árvore e chamou a atenção para a necessidade de se apresentarem todos os cálculos efectuados.

Na continuação da aula, a professora pediu aos alunos que tomassem nota de um conceito novo que iria passar a trabalhar, ditando:

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade do outro ocorrer, ou seja, $p\left(A/B\right)=p\left(A\right)$ ou $p(B/A)=p(B)$, o que permite deduzir então a seguinte fórmula: $p(A\bigcap B)=p(A)\times p(B)$ para os acontecimentos independentes".

E referiu a propósito desta fórmula: isto é muito importante, aplica-se muitas vezes em probabilidade.

A aula prosseguiu propondo aos alunos a resolução dos exercícios 63 e 64, que foram resolvendo sozinhos ou em pares, e a professora foi esclarecendo dúvidas pontuais ao circular pela sala e ao observar o trabalho que os alunos realizavam.

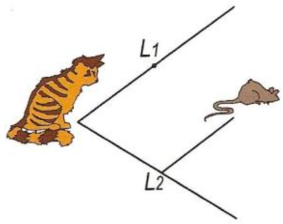
Exercício 63
Relativamente aos acontecimentos independentes A e B, sabe-se que $p(A)=0,2$ $p(\overline{B})=0,7$. Calcula $p(A\bigcap B)$.

Exercício 64
Admite que, de dois acontecimentos A e B, se tem $p(A)=0,8$, $p(B)=0,5$ e $p(\overline{A}\bigcup\overline{B})=0,6$.
64.1. Verifica se os acontecimentos A e B são independentes.
64.2. Determina a probabilidade de não se verificar A nem B.

No segundo exercício surgiram algumas dúvidas, tendo a professora pedido a um aluno para o ir resolver ao quadro e esclareceu: *Diz assim, determina a probabilidade de não se verificar A nem B. Isto significa não se verificar o A e não se verificar o B*, e conclui: *Têm de fazer a intersecção dos acontecimentos*.

Terminada a aula, a professora pediu aos alunos para resolverem os exercícios 60, 61 e 62 do manual escolar.

Exercício 60
Observa a figura



Supõe que o gato escolhe aleatoriamente um caminho e não inverte a sua marcha.
Considera:
A: "passar por L_1";
B: "passar por L_2";
C: "encontrar o rato".
Determina:
60.1. $p(C/L_1)$
60.2. $p(C/L_2)$
60.3. $p(\overline{C})$.

Exercício 61.
Numa empresa produzem-se dois tipos de peças A e B, correspondendo 60% da produção a peças do tipo A. Dada uma peça do tipo A, a probabilidade de ser defeituosa é de 2% e dada uma peça do tipo B a probabilidade de ser defeituosa é de 4%.
Escolhida uma peça ao acaso, verificou-se que não tinha defeito, qual é a probabilidade de ter sido escolhida uma peça do tipo A?

Exercício 62.
Os alunos de duas turmas A e B encontram-se num autocarro para iniciarem, em conjunto, uma visita de estudo. A turma A é constituída por 15 rapazes e 10 raparigas e a turma B por 8 rapazes e 12 raparigas.
Escolhe-se um aluno ao acaso. Recorrendo ao diagrama em árvore, calcule a probabilidade de:
62.1. ser rapaz da turma A;
62.2. ser rapariga.

Ao longo das duas aulas foram resolvidos 10 exercícios, com várias alíneas. Tipificando os exercícios propostos pela professora Ana, em 2 pedia-se o valor de uma probabilidade simples, em 3 o valor de uma probabilidade conjunta, em 4 o valor de uma probabilidade condicionada directa, em 2 o valor da probabilidade condicionada com o eixo temporal invertido, em 3 a definição de acontecimentos independentes e em 2 a aplicação da fórmula da probabilidade condicionada e da axiomática das probabilidades. Os exercícios propostos para trabalho de casa eram similares aos exercícios já resolvidos durante as aulas.

Comparando com os problemas propostos pela professora com os propostos no teste, salienta-se o exercício 58 do mesmo tipo do exercício 6b), envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada directa e com o eixo temporal invertido, os exercícios 56 e 57 do tipo do exercício 4, envolvendo o cálculo de probabilidades simples, conjuntas e condicionadas e o exercício 59 do tipo do 8, envolvendo o cálculo de uma probabilidade total.

4.3.2. O ensino da professora Berta

A professora Berta deu início à primeira das duas aulas dedicadas ao estudo da probabilidade condicionada começando por corrigir as questões 4 e 9 do livro de exercícios, versando conceitos de probabilidades, mas não de probabilidade condicionada.

> Exercício 4
> Uma moeda equilibrada tem as faces numeradas com um e dois.
> Considera a experiência aleatória que consiste em fazer três lançamentos da moeda e registar em cada um deles o número da face que fica voltada para cima.
> 4.1. Indica o espaço de resultados associado à experiência descrita.
> 4.2. Sejam A, B e C os acontecimentos:
> A: no segundo lançamento ocorre a face com o número 1;
> B: ocorre a face com o mesmo número nos três lançamentos;
> C: no primeiro lançamento e no último ocorre a face com o mesmo número.
> Mostra que:
> 4.2.1. $\overline{B} \cup C$ é um acontecimento certo;
> 4.2.2. $\overline{A \cup \overline{B}}$ é um acontecimento elementar;
> 4.2.3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Neste exercício estuda-se a construção do espaço amostral, a classificação dos acontecimentos e ainda a aplicação das propriedades das suas operações. No caso da definição do espaço amostral, recorde-se esse conceito foi também incluído no teste usado no estudo.

Esta questão não levantou qualquer dúvida as alunos, tendo estes comentado que *"o exercício é fácil, só dá é trabalho"*.

Exercício 9
Admite que num saco há três bolas, sendo duas azuis e uma vermelha.
9.1. São retiradas, uma a uma, sem reposição, três bolas.
Determina a probabilidade de:
9.1.1. as bolas azuis ocorrerem em ordens consecutivas;
9.1.2. a bola vermelha ocorrer na primeira extracção.
9.2.São retiradas, uma a uma, com reposição, três bolas.
Determina a probabilidade de:
9.2.2. as bolas retiradas serem da mesma cor;
9.2.2. ocorrerem exactamente duas bolas vermelhas.

Neste exercício estuda-se a problemática da extracção com e sem reposição, o que também foi incluído no teste usado no estudo. Mais especificamente, trata-se de um exercício de tiragem de bolas numa situação de sincrónica, onde se pretende que os alunos utilizem a regra do produto.

Também neste caso, os alunos não apresentaram dificuldades na sua resolução. O aluno que foi resolver o exercício ao quadro apenas apresentou os resultados, tendo a professora recomendado ao aluno a apresentação do esquema que tinha usado na resolução do problema.

Após a correcção do trabalho de casa e como nenhum aluno apresentou dúvidas, a professora informou os alunos que iam começar a estudar uma temática nova. Nesse sentido, pediu-lhes que resolvessem a actividade 8 da página 42 do manual escolar.

Actividade 8
O Pedro encontra-se com um grupo de amigos e retira, ao acaso, uma carta de um baralho vulgar de 52 cartas. Em seguida, pede aos amigos para adivinharem a carta que saiu. Sem ver a carta, o Luís afirma "É um valete".
Qual é a probabilidade de o Luís ter adivinhado?
Sem responder ao palpite do Luís, o Pedro afirma: "vou dar uma pista: é uma figura", ao que o Luís responde: "mantenho o meu palpite, é um valete".

Tendo em conta a informação do Pedro, qual é agora a probabilidade de o Luís ter razão? Justifica o facto de o Luís não alterar o seu palpite.

Depois de os alunos terem lido a questão, a professora questionou os alunos sobre o valor da probabilidade pedida na primeira alínea, tenho os alunos de imediato indicado o valor correcto.

Para a resolução da segunda alínea, a professora questionou os alunos sobre como poderia ser agora o cálculo da probabilidade pedida.

P — Agora, temos uma pista.

A — Agora a probabilidade é de $\frac{12}{52}$.

A — Não é nada... é de $\frac{4}{12}$.

P — Pois, podemos restringir o espaço amostral. O que aconteceu foi que ao darmos a informação adicional condicionamos o espaço amostral.

P — Vamos ler a informação acerca deste conceito que está na ficha que distribui (ver Anexo III).

Os alunos leram a definição de probabilidade condicionada que constava da ficha e de seguida a professora chamou a atenção dos alunos para o facto de "os nossos casos possíveis passam a ser a informação adicional...", e no quadro registou:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

P — E lê-se "probabilidade de A ocorrer <u>sabendo que</u> B ocorreu".

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\Leftrightarrow p(A\cap B)=p(B)\times p(A/B)$$

P — Pode ser $p(A/B)$ ou $p(B/A)$, tanto faz, eu aqui comecei por A. Têm é de ter em atenção que em baixo fica o que já ocorreu.

A — A barra é inclinada?

P — A barra é a direito, mas não há problemas que o enunciado diz.

P — Todas as probabilidades são condicionadas ao espaço amostral. Assim: $p(A/\Omega)=\frac{p(A\cap\Omega)}{p(\Omega)}=\frac{p(A)}{1}=p(A)$ verifica a axiomática.

Vejam: $p(\Omega/A)=\frac{p(\Omega\cap A)}{p(A)}=\frac{p(A)}{p(A)}=1$, o que é importante é verificar que o que já aconteceu está por baixo [referindo-se à probabilidade do acontecimento condicionante].

Continuou a aula informando os alunos que iriam resolver os exercícios constantes da ficha que tinha distribuído e que em alguns exercícios utilizariam a fórmula e noutros não. No entanto colocou a fórmula da probabilidade condicionada no quadro para que todos os alunos a pudessem visualizar com facilidade.

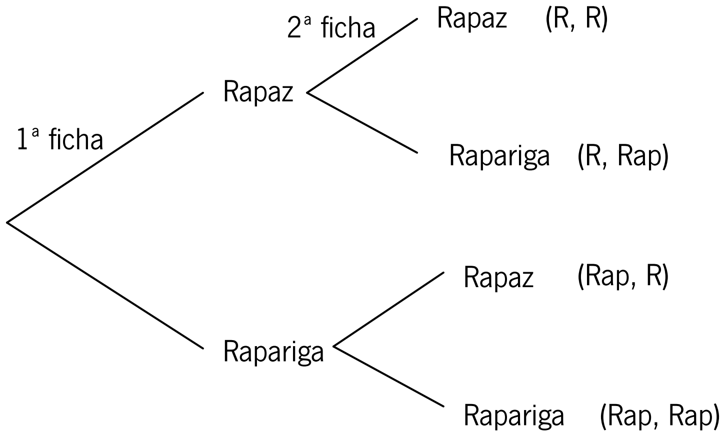
Exercício 1

Consideremos uma família com dois filhos e que existe igual probabilidade de cada filho ser rapaz ou rapariga. Qual é a probabilidade de que ambos os filhos sejam rapazes, dado que:

1.1. O filho mais velho é rapaz?

1.2. Pelo menos um dos filhos é rapaz?

A professora aconselhou os alunos a elaborarem um esquema apropriado para a representação dos dados do exercício e construiu no quadro, como exemplo, um diagrama de árvore para colocar os dados.



Seguidamente, a professora questionou os alunos acerca do valor da probabilidade do "primeiro filho ser rapaz", tendo os alunos respondido que o valor dessa probabilidade é $\frac{1}{2}$, pois é dada por $\frac{(R,R)}{(R,Rap),(R,R)}$. Comentou ainda com os alunos que este acontecimento podia ser traduzido pelo acontecimento "2 filhos rapazes, sabendo que o mais velho é rapaz".

$$p(2 \text{ filhos rapazes/o mais velho é rapaz}) = \frac{p(2 \text{ filhos rapazes e o mais velho é rapaz})}{p(\text{o mais velho ser rapaz})} =$$

$$= \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Questionados os alunos acerca de possíveis dúvidas na resolução proposta, nenhum aluno se manifestou, pelo que a professora passou à resolução da segunda alínea do exercício. A estratégia que a professora implementou para a sua resolução foi em tudo idêntica à usada na alínea anterior. Primeiro os alunos tentaram determinar o valor da probabilidade sem a aplicação da fórmula e de seguida resolveram o exercício aplicando a fórmula.

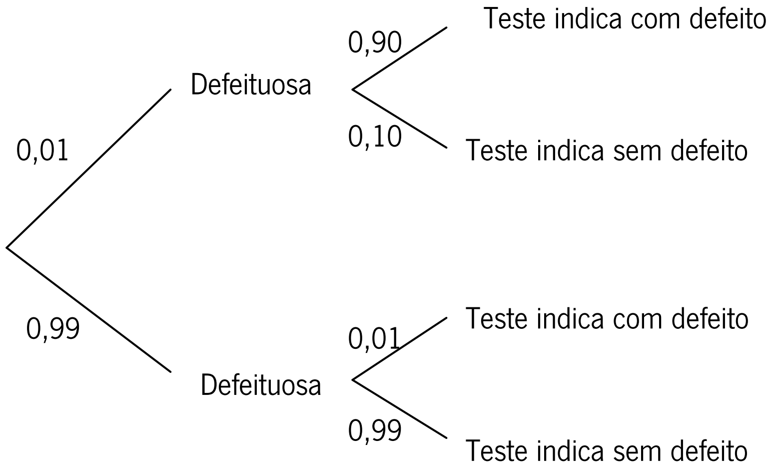
> P — (No quadro) Vamos ver... queremos a probabilidade "2 rapazes sabendo que pelo menos um é rapaz". Pelo diagrama de árvore temos (R, Rap), (Rap, R), (R, R), o que dá $p = \frac{1}{3}$. Ou podemos considerar:
>
> $$p(2 \text{ rapazes/pelo menos 1 é rapaz}) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$
>
> Perceberam a probabilidade condicionada? Há uma informação adicional... "pelo menos 1 dos filhos é rapaz".

A professora passou de seguida à resolução do segundo exercício da ficha de trabalho:

Exercício 2
Numa linha de produção de uma fábrica de componentes electrónicas, 1% das componentes produzidas são defeituosas. Foi desenvolvido um teste rápido, mas não completamente fiável, já que em 90% dos casos detecta que a componente é defeituosa, quando ela é efectivamente defeituosa, enquanto que em 99% dos casos detecta que a componente é boa, quando ela é boa. Qual a probabilidade de uma componente escolhida ao acaso ser defeituosa, quando o teste indica que ela é defeituosa.

Antes ser resolvido no quadro, a professora sugeriu aos alunos que tentassem primeiro resolver sozinhos o exercício. Aconselhou a começarem a resolução pela construção de um diagrama de árvore: *"sempre que o enunciado é elaborado é o diagrama de árvore que devemos fazer"*. Passados alguns minutos, em que os alunos tentaram resolver a questão, a professora solicitou a uma aluna que fosse ao quadro apresentar o raciocínio utilizado.

P — Já repararam que há duas questões: "ser defeituosas" ou "não ser defeituosas"? Logo podemos começar por fazer os ramos



O valor das probabilidades coloca-se nos ramos, não se deve pôr em percentagem, mas sim decimal, e deves colocar teste, senão ficas com defeituosa, defeituosa.

Após a aluna ter construído o diagrama de árvore, a professora questionou:

P — Se eu perguntasse, Qual a probabilidade de o teste indicar defeito, sabendo que é mesmo defeituosa, vocês fariam:

$$\text{p(teste indicar defeito/é deituosa)} = \frac{\text{p(teste indicar defeito} \cap \text{é defeituosa)}}{\text{p(é defeituosa)}} =$$

$$= \frac{0,9 \times 0,01}{0,01} = 0,9$$

pois estaria a calcular a probabilidade do segundo ramo. Mas a pergunta é ao contrário, o que a questão pede é a probabilidade de a peça ser defeituosa sabendo que o teste indicou que era defeituosa e essa seria calculada da seguinte forma:

$$p\left(\text{é deituosa/teste indicar defeito}\right)=\frac{p\left(\text{é defeituosa}\cap\text{teste indicar defeito}\right)}{p\left(\text{teste indicar defeito}\right)}=$$

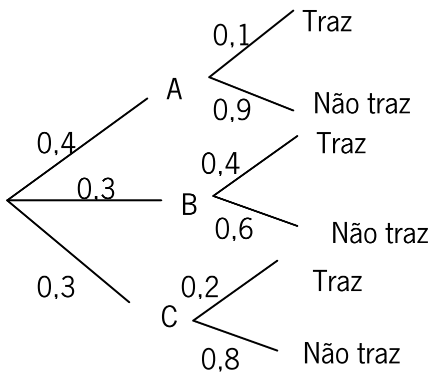
$$=\frac{0{,}9\times 0{,}01}{0{,}01\times 0{,}9+0{,}01\times 0{,}99}=\frac{10}{21}$$

P — Esta probabilidade não é uma probabilidade directa pois o espaço amostral é complicado, é ser defeituoso. Pode ser de duas maneiras, que é bem diferente do outro. Por isso nunca podíamos fazer mentalmente este tipo de exercício. O número de casos possíveis era de facto o teste ser defeituoso, mas o teste dava defeituoso de várias maneiras. Têm de ter cuidado de ver se a questão é condicionada.

De novo a professora questionou a turma acerca de possíveis dúvidas que os alunos tivessem. Como nenhum aluno se manifestou, propôs aos alunos que dessem início à resolução do exercício 3, também da ficha de trabalho.

Exercício 3:
Numa cervejaria trabalham 3 empregados: o António, o Bernardo e o Miguel. O António serve 40% dos clientes e os outros dois empregados dividem entre si a restante clientela. Ao pedir uma cerveja, o acompanhamento desta por tremoços é deixada ao critério do empregado. O António é sócio da cervejaria, pelo que apenas traz tremoços em 10% das vezes. O Bernardo oferece tremoços em 40% dos casos, enquanto que o Miguel oferece tremoços a 20% dos clientes. Ao pedir uma cerveja, calcule a probabilidade de que esta venha acompanhada de tremoços.

Depois de os alunos terem feito a leitura cuidada do exercício, a professora chamou a atenção dos alunos para a necessidade de terem cuidado ao dispor os dados do exercício. Questionou a aluna Kátia, que se tinha voluntariado para ir ao quadro, se queria fazer "uma árvore" e se achava necessário pois se "utilizarem o diagrama de árvore têm de abrir ramos para os 3 empregados". No quadro, a aluna construiu o seguinte diagrama de árvore:



P — Agora o que está em questão?
A — É se traz tremoços ou não traz tremoços.
P — Pois é. Têm sempre de considerar as duas hipóteses, a questão é só uma, a probabilidade de trazer tremoços...
A — É só 0,10.
P — Não. Este 0,10 não é de todos, é 0,10 de 0,40. Logo este nunca aparece sozinho, é $0{,}10 \times 0{,}40$, etc. O que quero são os três ramos, e sempre que se muda de ramo é +, dentro do ramo é $\times$. Logo,
$p(\text{trazer tremoços}) = 0{,}10 \times 0{,}40 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}22$.
Como podem ver este exercício era pedido o valor de uma probabilidade directa.

Dando continuidade à aula, a professora informou os alunos que iria agora tratar de um novo conceito que está ligado com a probabilidade condicionada, os acontecimentos independentes. Considerou que os acontecimentos são independentes quando o acontecimento condicionante não altera a probabilidade do acontecimento condicionado.

$p(A/B) = p(A)$ e $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

De seguida, leu com os alunos a definição de acontecimentos independentes da ficha formativa, que tinha entregado antes aos alunos.

O conceito de probabilidades condicionada permite-nos definir acontecimentos independentes, como sendo aqueles em que a informação acerca da realização de um dos acontecimentos não altera a probabilidade da realização de outro acontecimento. Assim o acontecimento A é independente do acontecimento B, com $p(A) > 0$ e $p(B) > 0$, se a probabilidade de A se verificar é igual à probabilidade condicional de A se realizar, dado que B se realizou: $p(A/B) = p(A)$ e $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Prosseguiu, então, com a resolução dos exercícios da ficha que tratavam agora os acontecimentos independentes, propondo aos alunos a resolução do exercício 1.

Exercício 1
Considere a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas, sem reposição, de uma caixa com 4 bolas brancas e 3 bolas pretas.
1.1.Qual a probabilidade de saírem duas bolas brancas?
1.2.Qual a probabilidade de sair bola branca na 2ª extracção?
1.3.Qual a probabilidade de sair bola branca na 2ª extracção, sabendo que saiu bola branca na 1ª extracção?
1.4. Seja A o acontecimento "saiu exactamente uma bola branca" e B o acontecimento "saíram 2 bolas brancas". Prove que estes acontecimentos são disjuntos mas não independentes.

A professora optou por ser ela própria a resolver este exercício no quadro, realçando o facto de ser um exercício *"normal".*

P — Temos 4 bolas brancas e 3 pretas, num total de 7 bolas. Retirei 2 bolas sem reposição. É o normal neste tipo de exercícios, temos uma caixa, um saco, tanto faz.
P — Vejamos 1ª pergunta: Qual a probabilidade de sair 2 bolas brancas sem reposição?
A — É sair Branca e Branca.
P — Exacto.
A — São 4 em 7, e depois 3 em 6.
P — (No quadro) $p(B,B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$ é uma pergunta directa.
P — Agora na 2ª pergunta: Qual a probabilidade de sair bola branca na 2ª extracção? Pode sair branca e branca ou preta e branca, logo, fica:
$p(B,B)+p(P,B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{7}$. Atenção que quando diz bola branca na 2ª extracção não diz que não pode ter saído branca também na primeira. Temos de ter cuidado, temos de considerar as duas hipóteses (B,B) e (P,B).
Vamos agora ver a 3ª questão. Para a resolução desta alínea agora temos de ter cuidado, pois queremos saber a probabilidade de sair bola branca na 2ª extracção, sabendo que saiu branca na primeira. Agora temos uma informação adicional: já sabemos que saiu branca na 1ª.
Podemos fazer directamente. Vejamos... se já saiu branca na 1ª extracção, o número de bolas total no saco agora já só são 6 e o número de bolas brancas passou a 3. Logo,
$p(\text{B na 2ª extracção / sabendo que saiu B na 1ª extracção})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,
Ou podíamos ter utilizado a fórmula e então ficava:
$p(\text{B na 2ª extracção / sabendo que saiu B na 1ª extracção})=$
$$=\frac{p(\text{B na 2ª e B na 1ª})}{p(\text{B na 1ª})}=\frac{p(B,B)}{p(B,B)+p(B,P)}=\frac{12/42}{24/42}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$
Perceberam?
Nesta última alínea, temos de ver... seja:
A: “sair exactamente 1 bola branca”
B: “sair 2 bolas brancas”
Sair exactamente 1ª bola branca pode ser (B,P) ou (P,B). Logo é $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{7}$.
Sair duas bolas brancas será (B,B), o que dá $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$.
Primeiro vamos provar que são disjuntos. O que significa disjuntos ou mutuamente exclusivos?
A — Que a intersecção dos acontecimentos é vazia.
A — Que a probabilidade da intersecção dos acontecimentos é nula.
P — Claro! E aqui, criando o espaço de acontecimentos vemos que a intersecção é vazia.
$A=\{(B,P);(P,B)\}$; $B=\{(B,B)\}$ são disjuntos. Vamos agora provar que não são independentes. Para isso temos de ver que a probabilidade da intersecção não é igual ao produto das probabilidades ou $p(A/B)\neq p(A)$.

$p(A) = p(B,P) + p(P,B) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$ A p(B) = p((B,B) já tínhamos visto que era 2/7. Vamos calcular agora $p(A) \times p(B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$, e $\underbrace{p(A \cap B)}_{\text{os acontecimentos são disjuntos}} = 0$. Como $\frac{8}{49} \neq 0$ não são independentes. Ou podíamos ter provado fazendo $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0}{p(A)} = 0 \neq p(A)$. Que conclusão podemos tirar daqui?

A — (Silêncio)

P — Como podem verificar podemos tirar daqui uma conclusão muito importante: dois acontecimentos que são disjuntos não podem ser independentes.

Questionados os alunos se havia dúvidas e como não existiam, a professora passou à resolução do exercício 2 da ficha de trabalho.

Exercício 2

Tendo dois dados de 12 faces, em que cada um tem 7 faces vermelhas e 5 brancas, perguntou-se a 40 estudantes qual dos acontecimentos era mais provável, no lançamento dos dois dados:

i) Sair duas faces vermelhas, ou
ii) Sair uma face vermelha e uma branca.

Trinta e seis estudantes responderam que era mais provável sair duas faces vermelhas. Está de acordo? Justifique.

A professora pediu aos alunos que pensassem no exercício. Depois de os alunos terem reflectido durante alguns minutos, a professora questionou-os:

P — O que é então mais provável? Vamos lá ver... Cada dado tem 12 faces, a probabilidade de sair 2 faces vermelhas é?

A — É sair (V,V), o que dá $p(V,V) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$.

P — E sair uma face vermelha e uma face branca?

A — Pode ser (B,V) ou (V,B).

P — $p(\text{1 face vermelha e 1 face branca}) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$.

P — Será que é assim? Será que eles tinham razão? Fica para pensar em casa.
Não se esqueçam de fazer em casa o exercício 4 e 5 da ficha.

E com esta proposta a professora terminou a aula.

Exercício 4.

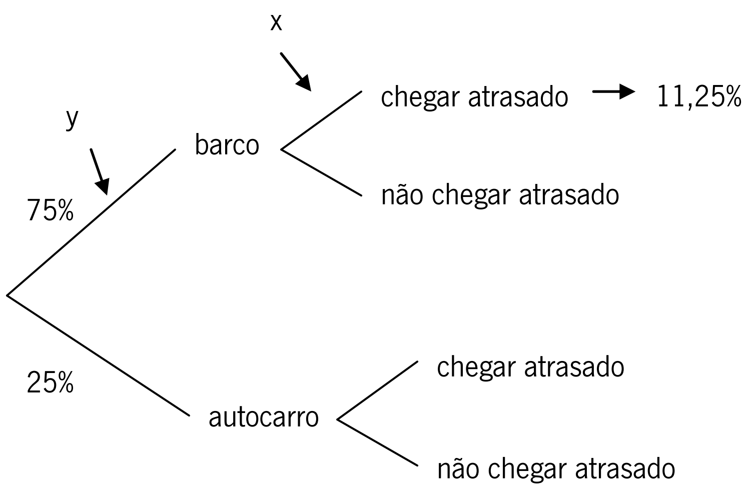
Um indivíduo que trabalha em Lisboa, mas reside na margem sul do Tejo, tem diariamente duas possibilidades para se dirigir ao trabalho: o barco ou o autocarro. Ele gosta muito de ir de barco, pelo que escolhe o barco 75% das vezes. A probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é 16,25%. A probabilidade de ir de barco e chegar atrasado é 11,25%. Qual é a probabilidade de chegar atrasado sabendo que veio de barco?

Exercício 5
Mostre que: $p(A \bigcup C / B) = p(A / B) + p(C / B) - p(A \bigcap C / B)$.

Na segunda aula que a professora Berta dedicou ao estudo do tema, foi, tal como com a professora Ana, dedicada à correcção do trabalho de casa e à resolução de exercícios do manual para consolidação dos conceitos estudados na aula anterior.

Após ditar e registar o sumário, a professora questionou os alunos sobre se os conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes estavam percebidos e se tinha havido dúvidas na resolução do exercício 4 do trabalho de casa. Como nenhum aluno se manifestou, a professora pediu a um aluno para vir ao quadro para apresentar a sua resolução.

A professora informou os alunos que este exercício podia ser resolvido directamente, mas que preferia que fosse resolvido através do diagrama de árvore para consolidar o conceito do diagrama de árvore. A aluna que estava no quadro propôs a seguinte resolução:



$p(\text{chegar atrasado/vem de barco}) = \frac{11,25}{75} = 0,15$

A professora explicou à turma a resolução que a aluna tinha efectuado.

P – Para chegar a este valor (11,25%), o cálculo seria o produto dos dois ramos y e x. Se quero x, e sei y vou de dividir o resultado por y. Ou então podemos fazer assim: $0,75 \times x = 0,1125 \Leftrightarrow x = \frac{0,1125}{0,75} = 0,15$.

A professora questionou a turma sobre como procederiam se só soubessem que chegou atrasado, tendo registado no quadro a equação que teriam de resolver para efectuar este cálculo: $0,75\times 0,15+0,25\times y=0,1625 \Leftrightarrow y=0,2$, e tentou perceber se os alunos tinham entendido a explicação que tinha dado.

Para consolidar o tema, a professora criou mais situações em que os alunos teriam de calcular probabilidades.

P — Agora a probabilidade de vir de autocarro e chegar atrasado.
p(vir de autocarro e chegar atrasado) =$0,25\times 0,20$=0,05, logo 5%.
P — E agora a probabilidade de vir de autocarro, dado que chegou atrasado

$$\text{p(vir de autocarro dado que chegou atrasado)} = \frac{\text{p(autocarro e atrasado)}}{\text{p(atrasado)}} =$$

$$= \frac{0,25\times 0,20}{0,75\times 0,15+0,25\times 0,20} = 0,318, \text{ logo } 31\%$$

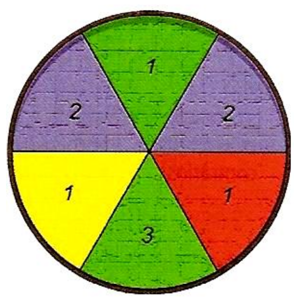
P — Perceberam a diferença.

De seguida, a professora passou à correcção do exercício 5, perguntando se alguém tinha conseguido resolver o exercício em casa e pedindo um aluno voluntário para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

Este exercício era uma aplicação directa da axiomática das probabilidades e a aluna que o foi resolver ao quadro não apresentou dificuldades. A professora comentou com a turma o método utilizado pela aluna para demonstrar a propriedade em questão e acrescentou que a demonstração poderia ter sido feita utilizando outras estratégias.

No seguimento da aula, a professora pediu aos alunos para abrirem o manual na página 14 e resolverem os exercícios propostos nessa página do manual. Informou que iria dar algum tempo para que os alunos tentassem resolver os exercícios sozinhos e depois indicaria um aluno para ir resolver o exercício ao quadro. Aconselhou ainda começar pelo exercício 50, *"que é muito fácil..."*

Exercício 50
Pôs-se em movimento a roleta representada na figura. Todos os sectores têm igual probabilidade de sair.



50.1. Determina a probabilidade de ser premiado:
50.1.1. o número 2, sabendo que saiu azul;
50.1.2. o número 3, dado que saiu verde.
50.2. Supõe que o número 1 foi premiado. Determina a probabilidade de:
50.2.1. sair amarelo;
50.2.2. não sair verde.

Após alguns minutos, em que os alunos tentaram resolver os exercícios propostos, a professora dirigiu-se ao quadro e solicitando sempre a colaboração dos alunos, apresentou uma proposta de resolução para esta questão:

P — (Quadro) $p(2/\text{azul}) = \frac{2}{2} = 1$.

P — Se tiverem dificuldade em fazer directo, podem fazer pela fórmula, mas só se a usarem é que usam o total. Se fizerem directo é que restringem o espaço amostral. Utilizando a fórmula ficava:

$p(2/\text{azul}) = \frac{p(2 \cap \text{azul})}{p(\text{azul})} = \frac{2/6}{2/6} = 1$

P — Vamos agora ver o 50.1.2). Eu quero a probabilidade de sair o 3 sabendo que foi verde. Ora eu tenho dois sectores verdes e só um com o número 3, logo $p(3/\text{verde}) = \frac{1}{2}$.

P — Para calcular agora a probabilidade de sair amarela sabendo que o número 1 foi premiado é $p(\text{sair amarelo}/1 \text{ foi premiado}) = \frac{1}{3}$.

Mesmo que façam directamente devem escrever primeiro assim para que vejam que é condicionada

P — Por fim, a $p(\text{não sair verde}/1 \text{ foi premiado}) = \frac{2}{3}$. Senão conseguirem fazer mentalmente apliquem a fórmula.

De seguida, a professora pediu aos alunos para verem o exercício 51, também do manual escolar.

Exercício 51
A figura representa um saco com 6 bolas: 3 vermelhas, 2 pretas e 1 azul, tal como a figura ilustra.
Retira-se uma bola ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: “sair bola preta”;
B: “sair número ímpar”.
51.1. Indica, justificando, o valor de:
51.1.1. $p(B/A)$;
51.1.2. $p(A/B)$.

51.2. Introduziu-se no saco uma bola com o número 7. Qual a cor da bola, sabendo que a probabilidade de sair bola azul, dado que saiu um número impar, passa a ser de 50%? Justifica.

De novo a professora resolveu este exercício no quadro, informando os alunos que o iria resolver de duas formas, directamente e utilizando a fórmula.

A professora registou no quadro e alertando os alunos para: *"a 1ª coisa que escrevem é* $p(B/A)$ *".*

P — Se fizerem directamente fica assim:

$p(B/A) = p(\text{sair número ímpar sabendo que saiu preta}) = \frac{2}{2} = 1$

P. Vou fazer agora pela fórmula para verem como fica:

$p(B/A) = \frac{p(\text{sair número ímpar} \cap \text{que saiu preta})}{p(\text{sair preta})} = \frac{2/6}{2/6} = 1$.

A professora resolveu a alínea seguinte, aproveitando para lembrar os alunos que para calcular a probabilidade de sair preta sabendo que saiu ímpar o número de casos possíveis passa a ser as ímpares. Assim, questiona os alunos sobre o número de bolas ímpares que temos no saco, voltando a frisar que se tiverem dúvidas *"fazem tudo direitinho",* querendo com esta isso dizer que devem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na resolução da alínea 51.2, a professora registou no quadro a resolução do exercício, estabelecendo com os alunos o seguinte diálogo:

P — Agora temos um acontecimento novo, a introdução de uma nova bola: $p(\text{sair ímpar/Azul}) = 50\%$.

A — Oh professora, não é assim, é ao contrário.

P — Tens razão, é ao contrário: $p(\text{sair Azul/Ímpar}) = 50\%$. Podemos usar a fórmula ou o raciocínio directo. Com a fórmula ficava:

$p(\text{sair Azul/Ímpar}) = 50\% \Leftrightarrow \frac{p(\text{Azul} \cap \text{Ímpar})}{p(\text{ímpar})} = \frac{1}{2}$. Mas tinha de dar $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Logo temos de ter duas bolas azuis, portanto a nova bola é azul.

De seguida a professora desafiou os alunos a resolverem um "exercício mais elaborado. Vamos *fazer o exercício 56 da pág. 45".*

Exercício 56

Numa turma de 28 alunos há 8 raparigas e 10 rapazes que vão participar numa actividade desportiva. Nessa turma há um total de 15 rapazes. Escolhendo um aluno da turma ao acaso, qual é a probabilidade de:

56.1. ser rapariga?

56.2. ser rapaz e não participar na actividade referida?

56.3. participar na actividade sabendo que é rapariga?
56.4. ser rapariga, sabendo que participa?

A professora solicitou aos alunos que resolvessem o exercício sozinhos, insistindo que era um exercício fácil.

P — Vamos lá, pensem um bocadinho, também é fácil... 13 raparigas... Logo $p(\text{rapariga}) = \frac{13}{28}$.

P — Agora no 56.2 atenção que não é condicionada, é "e"

$p(\text{ser rapaz e não participar}) = \frac{5}{28}$.

P — "Participar sabendo que é rapariga". Agora é condicionada, podemos fazer pelo raciocínio: $p(\text{participar} / \text{rapariga}) = \frac{8}{13}$ (8 participantes no grupo das 13 raparigas),

ou utilizando a fórmula: $p(\text{participar} / \text{rapariga}) = \frac{8/28}{13/28} = \frac{8}{13}$.

P — Agora, por fim, para calcular a probabilidade de ser rapariga sabendo que participa, que também é condicionada, ficará utilizando a fórmula:

$$p(\text{rapariga}/\text{participar}) = \frac{p(\text{rapariga e participa})}{p(\text{participa})} = \frac{8/28}{18/28} = \frac{4}{9}$$

Dando a aula por terminada, Berta indicou como trabalho de casa a resolução dos exercícios números 17,18 e 20 das páginas 10 e 11 do livro de exercícios, informando tratar-se de exercícios são mais abrangentes.

4.3.3. Principais aspectos do ensino de Ana e Berta

Analisando as aulas leccionadas pelas professoras Ana e Berta, verificamos que nas duas aulas da professora Ana foram resolvidos 10 exercícios com várias alíneas, assim tipificados: em dois exercícios pedia-se o valor de uma probabilidade simples; em três o valor de uma probabilidade conjunta; em quatro o valor de probabilidade condicionada directa; em dois o valor da probabilidade condicionada com o eixo temporal invertido; em três envolvia-se o conceito de acontecimentos independentes e em dois envolvia-se o conceito de probabilidade condicionada e a axiomática das probabilidades. Verificamos ainda que os exercícios propostos para trabalho de casa eram similares aos exercícios resolvidos durante as aulas.

A professora Berta resolveu ao longo das duas aulas 13 exercícios, assim tipificados: dois de revisão dos conceitos elementares de probabilidade de um acontecimento e das operações com acontecimentos; quatro tratavam o tema da probabilidade conjunta em acontecimentos com e sem reposição; cinco tratavam o conceito da probabilidade condicionada directa; dois a probabilidade condicionada com o eixo temporal invertido; dois estudavam a probabilidade em acontecimentos independentes; um tratava da axiomática de probabilidade condicionada e dois tratavam da probabilidade total. Os exercícios propostos pela professora Berta para trabalho de casa, um tratava a probabilidade simples, a probabilidade condicionada directa, a probabilidade conjunta e a probabilidade condicionada com o eixo temporal invertido (o exercício 17), outro exercício, número 18, envolvia os conceitos da axiomática da probabilidade condicionada, já que consta de três alíneas com demonstrações e o ultimo estudava a probabilidade simples, a probabilidade conjunta e uma composição em que os alunos deveriam justificar o valor de uma probabilidade conjunta.

Fazendo a comparação dos exercícios propostos nas aulas das professoras, Ana e Berta, com os exercícios constantes do teste por nós aplicado no estudo, verificámos no caso da professora Ana: o exercício 58 é do mesmo tipo da questão 6b) do teste, envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada directa e com o eixo temporal invertido; os exercícios 56 e 57 são do tipo da questão 4 do teste, envolvendo o cálculo de probabilidades simples, conjuntas e condicionadas; e o exercício 59 é do tipo da questão 8 do teste, envolvendo o cálculo de uma probabilidade total. Já nos exercícios propostos pela Professora Berta, salientam-se as seguintes semelhanças com as questões propostas no teste: o exercício 1 da ficha distribuída pela professora (Anexo III) e a questão 1 do teste, envolvendo a definição de um espaço amostral e do espaço de um acontecimento; o exercício 2 e a questão 9 do teste, envolvendo o conceito de probabilidade condicionada numa situação sincrónica; o exercício 1 da segunda parte da ficha e a questão 6a) do teste, envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada directa; e o exercícios 56 e a questão 4 do teste, envolvendo o cálculo de probabilidades simples, conjuntas e condicionadas.

Comparando as aulas leccionadas pelas duas professoras, verificamos que as estratégias utilizadas foram análogas Ambas as professoras apresentaram os conceitos teóricos de forma directiva, sendo os alunos apenas meros receptores dos conceitos. De seguida, propuseram exercícios como forma de consolidar os conceitos apresentados. A forma de ensino directo continuou a desempenhar também um papel relevante no decorrer da resolução dos exercícios propostos, fornecendo aos alunos a informação necessária para a resolução das dúvidas e dificuldades sentidas pelos alunos. A este propósito recorde-se que em alguns exercícios as professoras assumiram a resolução total dos exercícios, talvez por que os consideravam de um nível de dificuldade maior.

A sequência didáctica de introdução dos conceitos, seguida da resolução de exercícios de consolidação verificou-se nas duas professoras, quer no estudo do conceito de probabilidade condicionada quer no estudo do conceito de independência. Além disso, nas duas aulas observadas foi notória a preocupação das duas professoras em esclarecer os alunos sobre a forma como deveriam de responder às questões de probabilidade condicionada que lhes surgissem nos Exames Nacionais.

Apesar das semelhanças na abordagem que as professoras realizaram no estudo do tema de probabilidade condicionada, observaram-se algumas diferenças. Uma primeira diferença residiu no facto de a professora Ana ter feito apelo constante à tabela de contingência e só em exercícios da segunda aula introduziu o diagrama de árvore, enquanto a professora Berta utilizou sempre o diagrama de árvore e não resolveu nas duas aulas nenhum exercício em que utilizasse uma tabela de contingência. Por outro lado, a professora Ana considerava importante atribuir aos acontecimentos uma letra que os representasse para assim poder representar e interpretar melhor as operações entre os acontecimentos e as probabilidades pedidas. Diferentemente, a professora Berta considerava importante escrever em linguagem corrente todos os acontecimentos e as operações entre eles.

Em termos de recursos educativos, a professora Ana, nas duas aulas observadas pela investigadora, utilizou o manual escolar como uma ferramenta fundamental no desenvolvimento das aulas, enquanto a professora Berta utilizou inicialmente uma ficha de trabalho para a apresentação do tema e depois também baseou as aulas na selecção de exercícios do manual escolar. Também o trabalho de casa, proposto por ambas as professoras, eram exercícios do manual escolar e/ou do caderno de actividades do manual.

O papel dos alunos foi essencialmente passivo, não tendo qualquer papel na descoberta dos conceitos estudados. Os diferentes conteúdos foram apresentados pelas professoras numa versão acabada e definitiva, não se observando qualquer trabalho de pesquisa nem era dado tempo aos alunos para trabalharem as tarefas. Mesmo no caso dos exercícios de consolidação dos conceitos antes apresentados, passado muito pouco tempo, as tarefas propostas eram resolvidas, quase sempre, pela professora no quadro.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O presente capítulo centra-se nas principais conclusões do estudo e está dividido em três secções: na primeira secção fazemos uma síntese dos principais aspectos que caracterizam o estudo realizado; na segunda secção apresentamos as conclusões do estudo organizadas segundo as questões de investigação e tendo em conta o enquadramento teórico que sustenta o estudo; e na terceira secção fazemos algumas recomendações consideradas pertinentes para aprofundar a temática do nosso estudo e relevantes para futuras investigações.

5.1. Síntese do estudo

A probabilidade condicionada é fundamental nas aplicações da estatística pois permite incorporar mudanças no nosso grau de crença sobre os sucessos aleatórios à medida que vamos obtendo novas informações. Além disso, trata-se de um conceito com muitas aplicações práticas e que está presente na vida do dia-a-dia, designadamente aquando da tomada de decisões (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009). Por isso, a sua correcta compreensão seja considerada por vários autores como de primordial interesse e justificativa dos muitos estudos que têm sido realizados.

O estudo realizado revestiu uma natureza fundamentalmente quantitativa e com desenho descritivo e comparativo (Gall, Gall & Borg, 2003).

Ao investigar em que medida o ensino do conceito de probabilidade condicionada alterava os raciocínios dos alunos, pretendeu-se compreender as dificuldades sentidas pelos alunos que participaram neste nosso estudo, bem como a influência que o ensino do conceito teve nas respostas e nos raciocínios elaborados por estes alunos ao resolverem as variadas situações de probabilidade condicionada com que foram confrontados. Neste âmbito, foram estabelecidas as três seguintes questões de investigação:

1- Que respostas e raciocínios apresentam os alunos do 12º ano de escolaridade na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois deste conceito ter sido leccionado?

2- O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12º ano altera as respostas e raciocínios usados pelos alunos?
3- Que tipo de ensino é proporcionado aos alunos do 12º ano de escolaridade para desenvolverem o conceito de probabilidade condicionada?

Todos alunos intervenientes no nosso estudo, 115 alunos do 12º ano de escolaridade de uma mesma escola secundária da cidade de Braga, participaram de modo voluntário, tendo sido pedida a devida autorização para a realização deste trabalho quer aos encarregados de educação dos alunos intervenientes, quer aos próprios alunos. As professoras destes alunos autorizaram a gravação em áudio das duas aulas que leccionaram sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência e apesar de se terem sentido algo nervosas pelo facto de a investigadora estar presente na sala de aula, como já foi mencionado anteriormente, desenvolveram o seu trabalho de uma forma natural, não tendo alterado os procedimentos e o habitual ritmo da aula.

A recolha de todos os dados do estudo foi efectuada no final do mês de Setembro e início do mês de Outubro de 2009, altura em que a temática do estudo foi leccionada pelas professoras de acordo com a planificação estabelecida na escola. A recolha dos dados foi efectuada através de um teste sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência realizado pelos alunos antes de os conceitos referidos terem sido leccionados (pré-ensino) e depois de terem sido leccionados (pós-ensino) e da observação das duas aulas em que foram leccionados os conceitos. Estas duas aulas foram também audiogravadas.

Em termos de análise de dados, as resoluções apresentadas pelos alunos às questões do teste foram estudadas em relação ao tipo de resposta (correcta e incorrecta) e ao raciocínio subjacente à resposta. No caso das respostas foram determinadas frequências (absolutas e em percentagem), sintetizadas em tabelas, de modo a comparar as respostas dos alunos antes e depois do ensino do tema implicado no estudo. Além das frequências, também recorremos ao teste de McNemar para estudar diferenças estatisticamente significativas entre as respostas dos alunos antes e depois do ensino e estudámos através da análise de covariância a influência dos factores professor e desempenho em Matemática sobre as respostas dos alunos no pós-ensino. Neste estudo recorremos ao programa de análise estatística SPSS, versão 17.0 para Windows, e adoptámos o nível de significância estatística 0,05.

No caso dos raciocínios subjacentes às respostas dos alunos definiram-se categorias *a posteriori*, aquando da análise de dados, e determinaram-se as percentagens de alunos segundo as diferentes categorias.

Finalmente, no caso do ensino, a análise de dados referentes às duas aulas observadas e gravadas em áudio foi orientada pelas notas de campo registadas pela investigadora e desenvolveu-se numa vertente essencialmente descritiva, enfatizando as palavras das professoras, e foi estudada e estruturada nos dois casos referentes às duas professoras.

No capítulo 2 foram referidos as conclusões de estudos efectuados de forma a compreender a forma como os raciocínios se desenvolvem quando se está perante problemas de probabilidade condicionada, tendo sido realçado a dificuldade que o tema envolve, bem como a sua importância.

5.2. Conclusões

Nesta secção apresentamos e discutimos os principais resultados do estudo, tendo por referência as questões de investigação nele estabelecidas e a literatura que foi revista no estudo.

5.2.1. Questão de investigação 1

Que respostas e raciocínios apresentam os alunos do 12º ano de escolaridade na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois deste conceito ter sido leccionado?

O teste que os alunos resolveram antes e depois do ensino dos conceitos de probabilidade condicionada e independência era constituído por 14 questões, algumas com várias alíneas, e dividia-se em duas partes: uma constituída por 10 questões de resposta aberta e outra constituída por quatro questões de escolha múltipla.

Na questão 1 era pedido que os alunos descrevessem o espaço amostral em experiências aleatórias, não considerando em 1a) qualquer restrição do espaço amostral e considerando em 1b) uma condição que restringe o espaço amostral. Nesta questão verificámos que a maioria dos alunos respondeu correctamente quer à alínea 1a) quer à alínea 1b). Cerca de 1/3 dos alunos no pré-ensino e quase metade dos alunos no pós-ensino utilizou o diagrama de árvore como estratégia para a definição do espaço amostral. No caso da alínea 1b), a maior parte dos alunos definiu o espaço amostral recorrendo ao conjunto determinado em 1a) e retirando os elementos que não pertenciam ao novo espaço amostral. A maioria dos alunos que respondei incorrectamente a esta questão fê-lo por não ter considerado todos os arranjos (com repetição) de três elementos a partir dos dois elementos considerados (F e M).

A questão 2 consistia num problema de lançamento de dois dados, envolvendo o cálculo de uma probabilidade condicionada por restrição do espaço amostral. Verificámos nesta questão que a grande maioria dos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino, não respondeu correctamente à questão. Em relação à estratégia usadas, a maior parte dos alunos determinou a probabilidade pedida através da definição dos conjuntos correspondentes aos acontecimentos, verificando-se ainda, no pós-ensino, que poucos alunos recorreram à fórmula da probabilidade condicionada para o cálculo da probabilidade condicionada.

Na questão 3 pretendia-se que os alunos determinassem duas probabilidades simples e a sua probabilidade conjunta, bem como relacionassem as probabilidades simples com a probabilidade conjunta, ou seja, identificassem a independência dos acontecimentos. Nesta questão, quase todos os alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino, determinaram correctamente as probabilidades simples pedidas. Quanto à probabilidade conjunta, esta foi calculada correctamente por mais de metade dos alunos no pré-ensino e mais de 80% no pós-ensino. Já a relação de igualdade existente entre os valores da probabilidade conjunta e das probabilidades simples, que permitia afirmar a independência dos acontecimentos, foi identificada por muito poucos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino. Apenas no pós-ensino, alguns alunos identificaram correctamente a relação de igualdade pelo facto de considerarem os acontecimentos independentes, assumindo assim exactamente o pressuposto que devia ser validado.

Quanto à questão 4, pedia-se em 1a) a determinação de uma probabilidade simples, em 1b) a determinação de uma probabilidade conjunta e em 1c) e 1d) a determinação de duas probabilidades condicionadas. Enquanto quase todos os alunos no pré-ensino e no pós-ensino responderam correctamente à determinação da probabilidade simples (alínea 1a), em 1b) responderam correctamente cerca de ¾ dos alunos no pré-ensino, tendo este valor diminuído no pós-ensino para pouco mais de metade dos alunos. Também nas perguntas 1c) e 1d), onde era pedida a determinação de uma probabilidade condicionada, se verificou uma diminuição da percentagem de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino. Esta diminuição do número de respostas correctas deveu-se ao facto de os alunos terem confundido a probabilidade conjunta com a probabilidade condicionada, esta última entretanto leccionada, e terem utilizado a fórmula da probabilidade condicionada de forma incorrecta. Este tipo de erro é descrito em vários estudos realizados anteriormente (e.g., Díaz, 2009; Ojeda, 1995; Totohasina, 1992). Todos os erros descritos por Díaz (2009) no cálculo de probabilidades com os dados apresentados em tabelas de contingência foram verificados também no presente estudo, pelo que, como sugere esta autora, é necessário atender à capacidade dos alunos para efectuarem a leitura de dados fornecidos em tabelas de dupla entrada.

Na questão 5, incluindo as perguntas 5a) e 5b), e na pergunta 6a) tratavam-se problemas envolvendo a tiragem de bolas em situação com e sem reposição. Em todas estas perguntas pouco mais de metade dos alunos respondeu correctamente, verificando-se em todas elas um pequeno aumento do número de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino e salientando-se o recurso à regra do produto na determinação dessas probabilidades. Embora Tarr e Lannin (1997) considerem que os alunos têm mais dificuldade na resolução de problemas em situações com reposição pois nestas situações a alteração do espaço amostral é menos visível, no nosso estudo o número de respostas correctas nas situações com reposição e sem reposição foi idêntico.

Nas questões 6b) e a 7, consideradas contra-intuitivas, estudava-se a inversão do eixo temporal. Na alínea 6b), muito poucos alunos responderam correctamente no pré-ensino e no no pós-ensino. Nesta questão verificámos que nenhum dos alunos que respondeu correctamente à questão no pré-ensino utilizou a fórmula da probabilidade condicionada tendo, todos os alunos no pré-ensino e cerca de metade no pós-ensino apresentaram o resultado sem qualquer justificação. Já no pós-ensino, os restantes alunos recorreram à fórmula da probabilidade condicionada para calcular correctamente o valor da probabilidade pedida. Verificamos ainda que mais de metade dos alunos no pré-ensino e cerca de 1/3 dos alunos no pós-ensino consideraram que o facto da condição condicionante ocorrer temporalmente depois da condicionada, a probabilidade desta não é afectada por aquela, como é confirmada pelas afirmações: *"é indiferente que a segunda bola seja branca, por isso o número de bolas na primeira extracção é o completo"* e *"a segunda tiragem não afecta a primeira"*. Estas conclusões são comuns à investigação conduzida por Falk (1986) que verificou, tal como aconteceu com os nossos alunos, que enquanto na questão 6a) estamos perante uma inferência que envolve a sequência natural do tempo, na questão 6b) estamos perante uma inferência em que a sequência temporal é invertida, e isso, segundo Díaz (2009), pode criar dificuldades psicológicas. Esta crença de que um acontecimento que ocorre depois não pode afectar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes é conhecida por "falácia do eixo temporal".

A questão 7 foi respondida correctamente por 2 alunos no pré-ensino e por 9 alunos no pós-ensino. Tal como nos estudos efectuados por Díaz (2009), também os alunos envolvidos no presente estudo consideraram maioritariamente (85,2% no pré-ensino e 78,3% no pós-ensino) para o valor da probabilidade pedida 1/2, não tendo em atenção todos os sucessos do espaço amostral. Dos alunos que responderam correctamente à questão, no pré-ensino nenhum utilizou a fórmula da probabilidade condicionada, tendo chegado à resposta correcta através da construção do espaço amostral, enquanto no pós-ensino os 9 alunos que responderam correctamente à questão a utilizaram.

A questão 8, em que era pedida a determinação de uma probabilidade total, foi respondida correctamente por 38% dos alunos no pré-ensino, tendo este valor aumentado para 55,4% no pós-ensino. Cerca de 40% dos alunos no pré-ensino e metade dos alunos no pós-ensino resolveu a questão através da soma dos produtos das probabilidades dos acontecimentos dados. Já na questão 9, envolvendo a determinação de uma probabilidade condicionada, dadas a probabilidade conjunta e a probabilidade simples, cerca de 1/4 dos alunos no pré-ensino e 1/3 dos alunos no pós-ensino responderam correctamente à questão. Em termos de raciocínios, no pós-ensino, cerca de 8% dos alunos substituíram as probabilidades dadas na fórmula da probabilidade condicionada e cerca de 1/4 dos alunos, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, efectuaram a divisão das probabilidades dadas sem indicarem a fórmula da probabilidade condicionada. No pré-ensino, cerca de 1/3 dos alunos apresentaram o valor da probabilidade conjunta (dada no enunciado) para valor da probabilidade condicionada, tendo este valor diminuído para menos de 1/5 no pós-ensino.

Na questão 10 pretendia-se determinar a probabilidade conjunta de dois acontecimentos independentes, tendo-se verificado que apenas 9% dos alunos respondeu correctamente à questão no pré-ensino e o número de repostas correctas aumentou para um pouco mais de 1/4 dos alunos no pós-ensino. Nesta questão todos os alunos que responderam correctamente multiplicaram as probabilidades dos acontecimentos ($0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56 = 56\%$), assumindo a sua independência, enquanto uma percentagem considerável dos alunos que responderam incorrectamente, recorrendo a um diagrama de Venn, consideraram que a probabilidade de ser aprovado a uma ou a outra disciplina era 100% e concluíram que a probabilidade de ser aprovado às duas disciplinas seria $(0{,}8 + 0{,}7) - 1 = 0{,}5 = 50\%$.

A questão 11, do tipo de escolha múltipla, envolvia a independência dos sucessivos resultados da experiência de lançamento de uma moeda ao ar na avaliação da probabilidade de diferentes sequências de resultados e foi respondida correctamente pela grande maioria dos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino. As justificações dadas pelos alunos para efectuarem a escolha correcta consistiu, na maior parte das respostas, na afirmação da equiprobabilidade de sair qualquer das duas faces da moeda nos sucessivos lançamentos, reconhecendo-se, ainda que implicitamente, a independência dos resultados. Comparativamente com os resultados obtidos por Fernandes (1990), que aplicou também esta questão a alunos do 11° ano de escolaridade e futuros professores de Matemática, os resultados do presente estudo traduzem uma melhoria substancial das respostas destes alunos. Já o acaso, que foi a justificação dada por cerca de ¼ dos alunos, deve ser visto como a uma ideia muito limitada para justificar a equiprobabilidade.

Na questão 12, também de escolha múltipla, pretendia-se que os alunos comparassem a probabilidade da conjunção com a probabilidade de um dos acontecimentos que a constituíam. cujo conteúdo primário era a falácia da conjunção, ou a da adesão dos alunos às heurísticas da representatividade e da disponibilidade e de raciocínios baseados em factores causais e na falácia da conjunção" (Fernandes, 1990, p. 37), Esta questão foi respondida correctamente por mais de metade dos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino. É de salientar, no entanto, que cerca de 35% dos alunos, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, aderiram à falácia da conjunção, tendo considerado mais provável a conjunção do que a probabilidade do acontecimento simples. A adesão à falácia da conjunção resulta do facto de os alunos considerarem que um dos acontecimentos da conjunção ("ter mais do que 55 anos") é muito representativo do outro acontecimento ("ter um ou mais ataques cardíacos"), donde os alunos avaliarem a conjunção como sendo mais provável do que esse acontecimento ("ter um ou mais ataques cardíacos"), tal como se como verificou nos estudos efectuados por vários investigadores (e.g., Estrada, 7& de la Fuente, 2006; Fernandes, 1990; Sanchez, 1996; Tversky & Kahneman, 1983).

O conteúdo das questões 13 e 14 tratava a assimetria inferencial das causas (referência causal e diagnóstica). Falk (1986) sugere que muitos estudantes não discriminam adequadamente as direcções da probabilidade condicionada e confundem a p(A/B) com p(B/A), tendo denominado este erro de *falácia da condicional transposta*. Na questão 13 verificámos que a maioria dos alunos (58,3% no pré-ensino e 62,6% no pós-ensino) não identificou a relação causa-efeito existente entre os dois acontecimentos tendo considerado os dois acontecimentos igualmente prováveis. Este resultado foi também verificado no estudo realizado por Díaz (2009). Uma possível explicação para este erro dos alunos é dada por Falk (1986) ao considerar que a linguagem corrente utilizada no enunciado dos problemas não é suficientemente precisa. Quando escrevemos a probabilidade condicionada utilizando a linguagem matemática não restam dúvidas qual o acontecimento condicionada e o condicionante, mas na linguagem corrente essa distinção não é tão clara.

Na questão 14, tal como nos resultados de estudos efectuados por vários investigadores (e.g., Tversky & Kahneman, 1982, Fernandes, 1990), os alunos consideraram que o facto de a filha ter olhos azuis não pode afectar a cor dos olhos da mãe. As justificações do tipo: *"é uma questão genética"* e *"a ligação directa está entre a mãe e a filha, uma vez que não podemos alterar a ordem cronológica"* são reveladoras da crença dos alunos em considerar as relações causais mais fortes do que as diagnósticas. Assim, considerando os acontecimentos A: "a filha tem olhos azuis" e B: "a mãe tem olhos azuis", na probabilidade p(A/B) os alunos perceberam B como causa de A, estabelecendo de A e B uma relação de causa-efeito.

Considerando que algumas questões do teste envolviam aspectos considerados contra-intuitivos, classificámos este em dois tipos de questões: as contra-intuitivas (6b; 7; 11; 12; 13 e 14) e as não contra-intuitivas (todas as outras questões).

Analisando os raciocínios efectuados pelos alunos verificamos um grande recurso ao diagrama de árvore como uma ferramenta para colocar os dados e assim poder aplicar o raciocínio conducente ao resultado final.

Dos resultados obtidos no estudo, concluímos que as dificuldades dos alunos se verificaram não só nas questões consideradas contra-intuitivas, mas também nas questões que apresentavam problemas normalmente trabalhados na sala de aula.

No presente estudo, tal como é referenciado por outros autores, os alunos, devido à sua complexidade, associam o conceito de probabilidade condicionada com a problemática da causalidade e temporalidade (e.g. Falk, 1978, Tvershy & Kahneman, 1982, Díaz, 2009) e têm dificuldades na determinação da probabilidade em experiências compostas, em situações sincrónicas e diacrónicas, e em situações de com e sem reposição (e.g. Falk, 1983, Falk, 1988, Borovenik & Benz, 1991, Fischbein & Gazit, 1984, Dìaz, 2009). Também confundem a independência com a incompatibilidade dos acontecimentos, trocam os acontecimentos da probabilidade condicionada, isto é, confundem a probabilidade condicionada com a sua transposta, confundem a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta e atribuem à probabilidade conjunta um valor superior ao da probabilidade de um dos seus acontecimentos constituintes (Tversky & Kahneman, 1983), violando as regras lógicas do cálculo de probabilidades.

Estas dificuldades e erros conduzem-nos à conclusão de que muitos alunos possuem um conceito de probabilidade condicionada pouco aprofundado, apontando esta evidência para os níveis 2 e 3 na compreensão do conceito segundo a categorização de Tarr e Jones (1997). Considerando que os alunos atribuíram valores superiores a 1 a uma probabilidade, aderiram à falácia do eixo temporal, não seleccionaram do enunciado a informação relevante e não distinguiram situações com e sem reposição, que são características do nível 2 – Transicional, podemos concluir que muitos dos alunos do nosso estudo se posicionam neste nível. Por outro lado, dado que reconheceram a influência da reposição ou não reposição na probabilidade, produziram a composição completa do espaço amostral, confundiram a probabilidade conjunta com a probabilidade condicionada e inverteram a probabilidade condicionada podemos concluir que também muitos alunos se posicionam no nível 3 – Quantitativo informal.

Em síntese, os resultados obtidos no presente estudo leva-nos a concluir que o conceito de probabilidade condicionada é um conceito difícil para os alunos, tal como é referenciado na literatura (e.g. Fischbein & Gazit, 1984; Tarr & Jones, 1997; Tarr & Lannin, 2005).

5.2.2. Questão de investigação 2

O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12º ano altera as respostas e raciocínios usados pelos alunos?

Ao analisarmos os resultados obtidos pelos alunos no pré-ensino e no pós-ensino verificamos que os alunos apresentaram muitas dificuldades na resolução das questões incluídas no teste, conforme se confirma amplamente pelas respostas e raciocínios por eles apresentados.

O ensino da probabilidade condicionada não alterou substancialmente as respostas correctas e as justificações dadas pelos alunos nas diversas questões, havendo inclusive casos onde o número de respostas correctas diminuiu do pré-ensino para o pós-ensino do conceito de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes. Foi o caso da questão 4 (alíneas 4b, 4c) e 4d), cujo conteúdo versava a exploração de uma tabela de contingência, e que constitui um tipo de tarefa presente na vida diária (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009).

Em termos de significância estatística, a aplicação do teste de McNemar às respostas correctas e incorrectas no pré-ensino e no pós-ensino determinou diferenças estatisticamente significativas em oito das 21 perguntas que constituíam, especificamente: nas perguntas 1a) e 1b), 3a), 3b), 8 e 9, para um nível de significância estatística de 0,01, e nas perguntas 4d) e 6b), para um nível de significância estatística de 0,05.

Considerando o número total de respostas correctas obtidas por cada aluno em todas as perguntas do teste, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, a aplicação do teste t de Student para amostras emparelhadas determinou diferenças estatisticamente significativas ($p < 0{,}01$). Por outro lado, estudando separadamente o número total de respostas correctas nas seis questões contra-intuitivas e nas restantes questões, consideradas não contra-intuitivas, a aplicação do teste t de Student para amostras emparelhadas não determinou diferenças estatisticamente significativas no primeiro caso ($p = 0{,}094$) e determinou diferenças estatisticamente significativas no segundo caso ($p < 0{,}01$). O facto de não se terem obtido diferenças estatisticamente significativas no caso das situações contra-intuitivas revela o menor impacto do ensino regular sobre este tipo de situações, tal como tem sido confirmado em outros estudos (e.g., Fernandes, 1990; Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein & Schnarch, 1997).

Verificámos, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, que os alunos cometeram vários erros, que também são referidos por Díaz (2009), tais como: confusão da probabilidade com os casos possíveis (frequências absolutas); obtenção de probabilidades maiores do que a unidade; confusão da reunião com a intersecção, apresentando por resposta $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$; considerarem os acontecimentos independentes efectuando o produto para o cálculo da probabilidade conjunta.

Em termos dos raciocínios usados pelos alunos para justificarem as suas respostas salienta-se o recurso ao diagrama de árvore, ao diagrama de Venn, à fórmula da probabilidade condicionada, à lei de Laplace e à regra do produto.

Tal como no caso das respostas, também no caso dos raciocínios não se verificaram alterações muito significativas do pré-ensino para o pós-ensino. A única excepção, que se verificou ao longo de várias questões, foi o uso da fórmula da probabilidade condicionada para determinar as probabilidades pedidas no pós-ensino. A utilização da fórmula da probabilidade condicionada apenas no pós-ensino naturalmente foi uma consequência do ensino, pois antes do ensino não seria razoável esperar que os alunos a utilizassem. Além disso, muitas vezes essa fórmula foi aplicada de forma incorrecta, explicando mesmo, em algumas perguntas, a diminuição da percentagem de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino.

No caso das situações contra-intuitivas, exceptuando a falácia do jogador de sorte e azar (Fernandes, 1990) que foi rejeitada pelos alunos, quer no pré-ensino quer no pós-ensino, todos os outros raciocínios falaciosos que foram referidos no pré-ensino também foram afirmados no pós-ensino. Entre o pré-ensino e o pós-ensino, a adesão dos alunos à falácia do eixo temporal (Falk, 1986) foi um ligeiramente menor no pós-ensino, a adesão à falácia da conjunção (Tversky & Kahneman, 1983) manteve-se ao mesmo nível nos dois momentos e a adesão a factores causais foi ligeiramente superior no pós-ensino. Estes resultados permitem afirmar que a influência do ensino regular sobre estes raciocínios falaciosos praticamente não se fez sentir, confirmando-se o que antes se tinha verificado com as respostas.

5.2.3. Questão de investigação 3

Que tipo de ensino é proporcionado aos alunos do 12º ano de escolaridade para desenvolverem o conceito de probabilidade condicionada?

Os conceitos de probabilidade condicionada e de independência são difíceis de ensinar e aprender (Gras & Totohasina, 1995) constitui uma hipótese amplamente confirmada no estudo realizado.

Embora a estocástica faça parte dos currículos da escola básica e secundária na maior parte dos países, nos estudos realizados verifica-se que os professores não têm uma boa preparação neste tema como têm em outras áreas da matemática. Por outro lado, os estudos realçam o facto de que os livros de texto não oferecem um suporte suficiente para o ensino, apresentando probabilidades apenas na sua abordagem clássica e em que as aplicações são restritas a jogos de sorte e azar, para além de em alguns casos apresentarem definições de conceitos incorrectos (Batanero, Godino e Roa, 2004). Ora, estas limitações repercutem-se certamente no ensino e não contribuem para o aprofundamento da formação dos professores.

Um ponto fundamental na formação dos professores é a reflexão epistemológica, pois pode ajudá-los a compreender o papel dos conceitos quer na Estatística quer nas outras áreas da matemática e a sua importância na aprendizagem dos alunos e na compreensão das suas dificuldades conceptuais na resolução de problemas. A probabilidade é uma área relativamente nova e o seu desenvolvimento formal está ligado a uma série de paradoxos que mostram a disparidade entre intuição e desenvolvimento conceptual (Borovnick et al. 1991). Borocvnik e

Peard (1996) destacam que os resultados contra-intuitivos em probabilidades surgem em níveis muito elementares, enquanto em outros ramos da matemática tais resultados surgem apenas em níveis de abstracção elevados.

Para Batanero, Godino e Roa (2004) a estocástica é um tema difícil de ensinar pois não podemos limitar-nos apenas à apresentação de diferentes modelos e a mostrar as suas aplicações. Temos de ir mais ao fundo nas questões difíceis, como por exemplo: "Como obter conhecimento a partir dos dados", "Por que razão um modelo é adequado?", "Como ajudar os alunos a desenvolver intuições correctas e a lidar com ideias controvérsias, tais como a aleatoriedade e causalidade?".

No ensino da estocástica os professores têm tendência para reflectir a sua visão da estocástica no seu ensino que implementam, na definição de estratégias de resolução de problemas e na definição de raciocínios standards usados em matemática.

No nosso estudo analisámos as duas aulas sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência, leccionadas por cada uma das duas professoras participantes. As aulas foram planificadas pelas professoras sem intervenção da investigadora, tendo esta observado as aulas nas cinco turmas envolvidas no estudo.

Da análise destas aulas, salienta-se que as estratégias usadas pelas duas professoras na abordagem dos conceitos de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes foram análogas. Ambas as professoras apresentaram um problema para a introdução do tema, seguido da explicação teórica dos conceitos e passaram de imediato à resolução de exercícios e problemas para consolidação dos conceitos. As duas professoras implementaram um ensino directo, quer na apresentação dos conceitos quer na resolução dos problemas propostos, tendo fornecido sempre toda a informação necessária para a resolução das dúvidas e dificuldades sentidas pelos alunos, havendo mesmo casos em que as professoras assumiram a resolução total dos exercícios/problemas, talvez por os considerarem de um grau de dificuldade maior.

Houve, no entanto, algumas diferenças entre as aulas leccionadas pelas duas professoras. A professora Ana fez a introdução do tema apresentando um problema cujos dados eram apresentados numa tabela de contingência e através da sua resolução foi introduzindo o conceito de probabilidade condicionada e a respectiva fórmula. Já a professora Berta, para introduzir o tema, pediu aos alunos para resolverem um problema proposto no manual escolar, que envolvia a extracção de cartas de um baralho. De seguida, entregou a todos os alunos uma ficha que continha os conceitos teóricos em estudo e, após leitura dos mesmos, apresentou no quadro a fórmula da probabilidade condicionada e passou à resolução de exercícios da ficha de trabalho.

Na introdução do conceito de acontecimentos independentes as duas professoras usaram estratégias semelhantes às usadas na conceito de probabilidade condicionada, tendo a professora Ana recorrido a um problema para introduzir o tema e a professora Berta mandou os alunos lerem a definição escrita na ficha de trabalho.

Para além das diferenças assinaladas, verificámos que as duas professoras abordaram o assunto de uma forma idêntica, tendo iniciado por fazer uma abordagem teórica do conceito, seguida da resolução de exercícios e problemas para consolidação conceitos teóricos apresentados.

Verificámos ainda que enquanto a professora Ana deu uma grande importância à análise da tabela de dupla entrada (tabela de contingência), a professora Berta deu uma relevância muito maior ao diagrama de árvore como estratégia para a compreensão e resolução das questões problemáticas.

O ensino aplicado aos alunos envolvidos no estudo para adquirem as noções de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes foi desenvolvido dentro da visão comum à disciplina de Matemática.

A comunicação privilegiada nas salas de aula assumiu predominantemente a forma unidireccional, já que, quase sempre, eram as professoras que formulavam as questões a que os alunos deviam responder, não sendo dadas aos alunos oportunidades de formular as suas próprias questões. Por vezes, as preocupações das professoras com a preparação dos alunos para o Exame Nacional fazia com que esta forma de interacção se reduzisse ainda mais, acabando por elas próprias darem as respostas às suas próprias perguntas.

Nenhumas das professoras atendeu às concepções intuitivas que os alunos tinham do conceito e tiveram como fundamental preocupação tornar as mensagens emitidas compreensíveis aos alunos, eliminando todos os possíveis ruídos e interferências e assegurando o feedback dos alunos através de perguntas cujas respostas pudessem evidenciar a aquisição dos conhecimentos transmitidos.

A visão da matemática demonstrada pelas professoras envolvidas no estudo centrava-se mais num conjunto de verdades objectivas, em vez de ser uma construção cultural partilhada pelos intervenientes, pois nesta última perspectiva as aulas teriam sido caracterizadas por processos de interacção social entre o professor e o aluno, sendo a aprendizagem resultado de um processo de interacção e reflexão onde o professor não se limita a transmitir um conhecimento matemático estabelecido e objectivamente codificado, mas empenha-se na organização de um conjunto de tarefas diversificadas e não rotineiras que promovam uma variedade de estratégias de resolução dos problemas por parte dos alunos e os levem a partilhar as suas ideias com vista à negociação de significados matemáticos e à construção de novos conhecimentos.

Da análise dos resultados obtidos constatou-se que as dificuldades verificadas nas diversas investigações analisadas na literatura são comuns aos alunos envolvidos no presente estudo, pelo que consideramos ser importante encontrar caminhos efectivos e ajustados para transmitir os conceitos aos alunos. Para tal, Batanero, Godino e Roa, (2004) referem as seguintes orientações em relação à formação dos professores e ao ensino:

– munir os professores de conhecimentos didácticos construídos pela reflexão epistemológica do significado dos conceitos a ser ensinados;

– desenvolver experiência em adaptar conhecimentos aos diferentes níveis de ensino e diferentes níveis de conhecimento dos alunos;

– desenvolver a capacidade de criticar e analisar os livros escolares e outros documentos curriculares;

– prever dificuldades, erros, obstáculos e estratégias dos alunos na resolução dos problemas;

– aprofundar a capacidade de analisar as respostas dos alunos a questões problemáticas;

– experimentar e utilizar outros exemplos de situações de ensino aprendizagem já testados em situações semelhantes e descritos nas literaturas.

Uma vez que se deseja que os alunos efectuam a sua aprendizagem através de uma forma activa, resolvendo problemas e interagindo com os restantes elementos da turma, também os professores devem desenvolver as suas estratégias de ensino interagindo com os seus pares, se queremos que usem uma estratégia de ensino aprendizagem construtivista. Nesse sentido, devem ser criadas condições ajustadas para os professores reflectirem sobre as suas perspectivas de ensino e discutir as suas ideias com os colegas. Esta formação é fundamental para que se consiga uma aprendizagem eficaz em todos os ramos da matemática, mas tratando-se da estocástica é ainda mais essencial que se proceda a uma nova forma de ensinar os conceitos. É fundamental que se parta dos conhecimentos prévios dos alunos, mesmo que estes sejam erróneos, para construir e cimentar os novos conhecimentos (Fernandes, 1990).

Finalmente, a análise de co-variância (Ancova) efectuada, considerando para variável dependente o número de respostas correctas obtidas pelos alunos no pós-ensino, para variável independente o professor que leccionou os conceitos de probabilidade condicionada e independência e para *covariate* o número de respostas correctas obtidas pelos alunos no pré-ensino, não determinou diferenças estatisticamente significativas no desempenho dos alunos no pós-ensino ($p = 0{,}343$). Conclui-se, assim, que o facto de os alunos terem sido ensinados por uma ou por outra das duas professoras não influenciou o número de respostas correctas por eles obtido no pós-ensino.

5.3. Recomendações para futuras investigações

Considerando os resultados do presente estudo e tendo em vista aprofundar o conhecimento no âmbito da problemática aqui abordada, apresentamos nesta secção algumas sugestões de futuras investigações a desenvolver, relacionadas com o tema da probabilidade condicionada e acontecimentos independentes de forma aos alunos colmatarem as dificuldades normalmente sentidas.

Relativamente ao tema da probabilidade condicionada e acontecimentos independentes seria importante efectuar estudos em que os alunos verbalizassem os raciocínios que efectuam na resolução das questões, uma vez que ao pedir que os manifestassem por escrito ficamos algumas vezes com dúvidas acerca dos raciocínios que os conduziu à resposta indicada. Um tal aprofundamento dos raciocínios dos alunos poderia, em termos metodológicos, passar pela realização de entrevistas clínicas aos alunos.

Quanto ao ensino desta temática parece-nos que seria igualmente importante elaborar estudos que abordassem as alterações provocadas nos raciocínios dos alunos quando estes são sujeitos a diferentes tipos de ensino, uma vez que os alunos envolvidos no nosso estudo, apesar de serem alunos de duas professoras diferentes, foram sujeitos, essencialmente, ao mesmo tipo de ensino. Esta problemática de investigação é tanto mais importante quanto o ensino regular, tal como acontece na sala de aula, não se mostrou muito eficaz para que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e erros.

Finalmente, seria também importante estudar se o trabalho colaborativo entre professores é potenciador do estabelecimento de tarefas e estratégias de ensino, bem como de um ambiente de aprendizagem que conduza a uma melhor aquisição dos conhecimentos por parte dos alunos no tema de probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

BIBLIOGRAFIA

Albert, J. (2006). Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint. In G. Burrill, & P. Elliott (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 417-433). Reston, VA: NCTM.

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales: ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística, Actas – I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação (CIEd).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.

Batanero, C. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno*, 44, 7-16.

Batanero, C.& Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada, Julio, 2007. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Batanero, C., Fernandes, J. A. & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.

Batanero, C., Godino, J. & Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1) [Online]. Consultado em 9 de Setembro de 2009, em http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Borovcnik, M., Bentz, H. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carvalho, C., Fernandes, J.A. (2005). Revisitando o conceito de Probabilidade com um olhar da Psicologia. Revista Quadrante, 14 (2) 71- 88

Castro, C. S. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 233-54.

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Education.* 2(3), 128-148.

Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma,* 48, 45-50.

Díaz, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el análisis de datos en Psicología. Tese de Doutoramento não publicada. Universidade de Granada.

Díaz, C. (2009). Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Ferreira (Orgs.), *Actas do II encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 100-116). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 291-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris. (Ed.), *Studies of Mathematics Education* (vol.7, pp. 175-184. Paris: UNESCO.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Figueiredo, A. C. (2000). *Probabilidade condicional: Um enfoque de seu ensino-aprendizagem*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probabilitty improve probabilistic intuititions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Gall, M. D., Borg, W. R. & gall, J. P. (2003). *Educational research: An Introduction.* New York: Longman Publishers USA.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, 44-63.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review,* 63, 25-34.

Gimenez, J. (2007). Probabilidades. *Uno*, 44, 5-6.

Godino, J. D., Batanero, M. C. & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données: Implication – similarité – corrélation. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 337-363.

Hawkins, A. S. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability- A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.

Jones, G., Langral, C. W. & Mooney E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lecoutre, M.-P. & Durant, J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemático do 3º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Tradução Portuguesa do original de 2000).

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269).

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. & Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, 36, 23-32.

Tarr, J. E. & Jones, G. A. (1997), A Framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.

Tarr, J. E. & Lannin, J. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215 -238). New York: Springer.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgments under uncertainty. In D. kahneman, P. Slovic e A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117 – 128). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D.(1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psycological Review*, 90(4), 293-315.

Ventsel, H. (1973). Théorie des probabilities. Éditions MIR: Moscou.

Watson, J. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, 88, 12-17.

Way, J. (2003). The development of young children's notions of probability. Comunicação apresentada no subgrupo 5 – Statistical Thinking da 54ª Conferência do CIEAEM, realizada em Bellaria (Itália) em Fevereiro de 2003.

Wonnacott, T. H. & Wonnacott, R. J. (1990): *Introductory Statistics*. USA. Editora John, Wiley & sons. 5ª Edição.

ANEXO I

Autorizações

Exma. Senhora Directora

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação – Supervisão Pedagógica em Ensino de Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado intitulada **Influência do Ensino nos Raciocínios de Alunos do 12º Ano de Escolaridade em Probabilidade Condicionada.**

Tendo em conta os objectivos que se pretende alcançar e tendo em conta as questões de investigação estabelecidas para o estudo, optou-se por desenvolver a investigação em três etapas:

- Na primeira etapa, será aplicado um teste a alunos do 12° Ano, onde lhes será solicitado que verbalizem os raciocínios que aplicam para resolver problemas de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes, antes do ensino do tema.
- Na segunda etapa serão observadas as aulas da(s) professora(s) titulares dos alunos que efectuaram o teste e que versem o conteúdo de probabilidade condicionada. Estas aulas, com a devida autorização da(s) professora(s), encarregados de educação, alunos e órgãos de gestão da escola, serão gravadas em áudio com o intuito de analisar a forma como o conceito é ensinado aos alunos.
- Na terceira etapa será aplicado de novo aos alunos o mesmo teste aplicado na primeira etapa.

De forma a viabilizar este projecto de investigação, solicito a V. Exª a autorização para efectuar todos os procedimentos atrás mencionados.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade de todos os participantes no estudo, bem como à escola, e ainda solicitar a autorização aos Encarregados de Educação.

Agradecendo a sua atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Autorização

Braga, 15 de Setembro de 2009 | Braga ,_____ de Setembro de 2009

A Professora Investigadora | A Presidente do Conselho Executivo

_____________________________ | _________________________________

(Mª do Carmo Cunha)

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação – Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada **Influência do Ensino nos Raciocínios de Alunos do 12º Ano de Escolaridade em Probabilidade Condicionada.**

O desenvolvimento da dissertação implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de um teste, seguida de observação das aulas, da sua gravação em suporte áudio, onde o tema irá ser leccionado e de novamente da resolução do teste aplicado antes.

Após autorização concedida pelo Conselho Executivo da Escola e da professora de Matemática da turma do seu educando, venho **solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte video e áudio das aulas em que esteja presente o seu educando** e em que será leccionado o tema das probabilidades condicionadas.

Comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade da professora, da escola e de todos os alunos da turma envolvida.

Os dados da gravação serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos.

Muito obrigada pela colaboração.

Braga, 18 de Setembro de 2009

A Professora de Matemática e Investigadora,

____

(Maria do Carmo Fernandes da Cunha)

------------------------------ ✂ ------------------------------

Sim, autorizo que se faça o registo em áudio das aulas __________

Não, não autorizo que se faça o registo em áudio das aulas _______

O Encarregado de Educação

____

Cara colega,

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação, Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada **Influência do Ensino nos Raciocínios de Alunos do 12º Ano de Escolaridade em Probabilidade Condicionada.**

Tendo em conta os objectivos que se pretende alcançar e tendo em conta as questões de investigação estabelecidas para o estudo, optou-se por desenvolver a investigação em três etapas:

- Na primeira etapa, será aplicado um teste a uma turma de alunos do 12.° ano, onde lhes será solicitado que verbalizem os raciocínios que aplicam para resolver problemas de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes, antes do ensino do tema. Estes problemas serão de grau de dificuldade crescendo, incluindo também problemas em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento passado conhecendo a probabilidade do futuro.
- Na segunda etapa, serão observadas aulas do professor dos alunos estudados e que versem o conteúdo de probabilidade condicionada. Estas aulas, com a devida autorização da professora, encarregados de educação, alunos e órgãos de gestão da escola, serão gravadas em áudio com o intuito de analisar a forma como o conceito é ensinado aos alunos.
- Na terceira etapa, será aplicado de novo aos alunos o mesmo teste aplicado na primeira etapa, e de novo será pedido aos alunos que verbalizem os raciocínios que serão igualmente registados em suporte de papel e áudio.

De forma a viabilizar este projecto de investigação, solicito-lhe autorização para aplicar o teste nas turmas do 12° Ano que lecciona, assistir às suas aulas no período em que a temática probabilidade condicionada estiver a ser desenvolvida, bem como para proceder à áudio-gravação das aulas. Solicito ainda que me permita o acesso a todo o material utilizado para leccionar o tema.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à sua identidade e da escola. Comprometo-me ainda, através da colega, a solicitar autorização aos Encarregados de Educação.

Agradecendo a sua atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Braga, 18 de Setembro de 2009.

A Professora Investigadora

____

(Mª do Carmo Fernandes da Cunha)

ANEXO II

Teste

Caro(a) Estudante

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação, Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada “Influência do Ensino nos Raciocínios em Probabilidades Condicionadas de Alunos do 12.º Ano de Escolaridade”.

Inserido no projecto de dissertação, o teste, a que venho pedir que respondas, tem por finalidade compreender os raciocínios dos alunos em probabilidade condicionada e não será usado para te atribuir qualquer classificação à disciplina de Matemática. Embora não tendo influência na tua classificação, é muito importante que leias cuidadosamente todas as questões e que respondas a todas as perguntas do teste com sinceridade e empenho, justificando os raciocínios. Nessas justificações podes utilizar números, cálculos, palavras, etc. As tuas respostas ao teste serão mantidas confidenciais e eu, enquanto pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a não divulgar as respostas a não ser para fins do estudo.

Muito obrigada pela colaboração

(Mª do Carmo Cunha)

I – DADOS PESSOAIS

Nome: ____

Idade: _____ (em anos) *Sexo*:: ☐ Masculino ☐ Feminino

Classificações obtidas na disciplina de Matemática:

no final do 3.º período do 10.º ano ______________

no final do 3.º período do 11.º ano ______________

N.º de repetências durante todo o teu percurso de estudante: ______________

Que anos repetiste? ______________

II – TESTE

PARTE 1

Nas questões desta parte do teste apresenta de forma clara todo o processo de resolução, indicando todos os cálculos que tiveres de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Escreve todos os resultados possíveis (espaço amostral) das seguintes experiências aleatórias:

a) Observar o sexo (M – masculino; F – feminino) dos filhos das famílias com três descendentes. (Exemplo: MMF, ...)

b) Observar o sexo (M – masculino; F – feminino) dos filhos das famílias com três descendentes em que dois ou mais são do sexo masculino.

2. Lançamos dois dados e sabemos que o produto dos números obtidos é 12.

Qual a probabilidade de que nenhum dos números saídos seja o 6?

(Distingue-se se um número saído é de um dado ou do outro.)

3. Extrai-se, ao acaso, um ou duas cartas de um baralho de 40 cartas com quatro naipes: ouros, espadas, paus e copas. No caso de se extraírem duas cartas, a primeira carta extraída é colocada no baralho antes de retirar a segunda. Cada naipe tem os números de 1 a 7, dama, valete e rei.

Seja O o acontecimento "Extrair uma carta de ouros" e R o acontecimento "Extrair um Rei".

a) Determina as probabilidades $P(O)$, $P(R)$ e $P(O \cap R)$.

b) Existe uma relação de igualdade entre os valores de $P(O)$, $P(R)$ e $P(O \cap R)$? Qual?

4. Realizou-se uma entrevista a um grupo de homens de uma determinada população, e obtiveram-se os seguintes resultados:

	Tem menos de 55 anos	Tem mais de 55 anos	Total
Sofreu um ataque cardíaco	29	75	104
Não sofreu ataque cardíaco	401	275	676
Total	430	350	780

Se escolhermos ao acaso uma destas pessoas:

a) Qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

b) Qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um ataque cardíaco?

c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

5. Num saco há três bolas brancas e quatro bolas pretas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente <u>duas</u> bolas do saco.

a) Supondo que a 1.ª bola extraída <u>é colocada</u> de novo no saco antes de se extrair a 2.ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

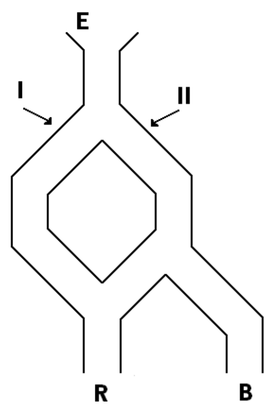
b) Supondo que a 1.ª bola extraída <u>não é colocada</u> de novo no saco antes de se extrair a 2.ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

6. Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.

a) Qual a probabilidade da segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca?

b) Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?

7. Solta-se uma bola em E. Se a bola sai por R, qual a probabilidade que tenha passado pelo canal I?



8. Numa cidade 60% da população são homens e 40% mulheres. Também se sabe que 50% dos homens e 25% das mulheres fumam.

Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de ser fumadora?

9. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter um resultado positivo numa mamografia é 10,3%. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter cancro de mama e uma mamografia positiva é 0,8%. Uma mulher de mais de 40 anos fez uma mamografia e deu resultado positivo. Qual a probabilidade da mulher ter realmente cancro de mama?

10. Um grupo de alunos de uma escola fez exame de Matemática e de Inglês. A percentagem de alunos aprovados a Matemática é de 80% e a percentagem de alunos aprovados a Inglês é de 70%. Supõe que a classificação obtida numa das disciplinas não afecta a classificação obtida na outra.

Qual a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso, ter sido aprovado nas duas disciplinas?

PARTE 2

Nesta parte do teste, em cada questão assinala a resposta correcta (apenas uma das três respostas indicadas é correcta) com uma cruz no quadrado respectivo (☒). *Seguidamente, explica o raciocínio que usaste para a obter, usando números, cálculos, palavras, etc.*

11. Uma pessoa lança uma moeda ao ar e anota se sai a face frente (F) ou a face verso (V). Em 6 lançamentos da moeda obtiveram-se os resultados: V F V V V V. Lançando novamente a moeda, então:

☐ É mais provável sair a face frente.

☐ É mais provável sair a face verso.

☐ É igualmente provável sair a face frente ou sair a face verso.

Explica o raciocínio que usaste:

12. Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos.

☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos.

☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste:

13. Um teste de diagnóstico de cancro foi administrado a todos os residentes de uma grande cidade onde há poucos casos de cancro. Um resultado positivo no teste é indicativo de ter cancro e um resultado negativo é indicativo de ausência de cancro.

O que é mais provável?

☐ Que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo.

☐ Que o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro.

☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste:

14. Supondo que é igual a proporção de mães e filhas com olhos azuis, qual dos acontecimentos seguintes é o <u>mais</u> provável?

☐ Que uma rapariga tenha olhos azuis, se a sua mãe tem olhos azuis.

☐ Que uma mãe tenha olhos azuis, se a sua filha tem olhos azuis.

☐ Os dois anteriores acontecimentos são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste:

FIM

ANEXO III

Ficha de Trabalho da Professora Berta

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Um dos conceitos mais importantes da Teoria das Probabilidades é o de probabilidade condicional, que está relacionado com o facto de em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispor de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite actualizar a atribuição de probabilidades a esse acontecimento. Assim, dados os acontecimentos A e B, com P (A)›0, define-se probabilidade condicional de B sabendo que A ocorreu e representa-se por :

P (B|A) = P (A∩B) / P(A) **e** **P(A∩B) = P(A)P(B|A)**

Ao falarmos em probabilidade condicional, nomeadamente probabilidade do acontecimento B dado A, estamos a dizer explicitamente que o espaço de resultados em que estamos a trabalhar é o definido pelo acontecimento A. Ao omitir aquela informação, estamos a admitir que o espaço de resultados é o espaço S, que se assume por defeito. Assim, a probabilidade de qualquer acontecimento A, P(A) não é mais do que a probabilidade condicional do acontecimento A dado S, P(A|S). A probabilidade condicional P(A|B) satisfaz os 3 axiomas da Teoria das Probabilidades.

EXEMPLOS:

1. Consideremos uma família com dois filhos e que existe igual probabilidade de cada filho ser rapaz ou rapariga. Qual a probabilidade de que ambos os filhos sejam rapazes dado que:
   1.1. O filho mais velho é um rapaz?
   1.2. Pelo menos um dos filhos é rapaz?

2. Numa linha de produção de uma fábrica de componentes electrónicas, 1%das componentes produzidas são defeituosas. Foi desenvolvido um teste rápido, mas não completamente fiável, já que em 90% dos casos detecta que a componente é defeituosa, quando ela é efectivamente defeituosa, enquanto que em 99% dos casos detecta que a componente é boa, quando ela é boa. Qual a probabilidade de uma componente escolhida ao acaso ser defeituosa, quando o teste indica que ela é defeituosa?
3. Numa cervejaria trabalham 3 empregados: o António, o Bernardo e o Miguel. O António serve 40% dos clientes e os outros dois empregados dividem entre si a restante clientela. Ao pedir uma cerveja, o acompanhamento desta por tremoços é deixada ao critério do empregado. O António é sócio da cervejaria, pelo que apenas traz tremoços em 10% das vezes. O Bernardo oferece tremoços em 40% dos

casos, enquanto que o Miguel oferece tremoços a 20% dos clientes. Ao pedir uma cerveja, calcule a probabilidade de que esta venha acompanhada de tremoços.

4. Um indivíduo que trabalha em Lisboa, mas reside na margem sul do Tejo, tem diariamente duas possibilidades para se dirigir ao trabalho: o barco ou o autocarro. Ele gosta muito de ir de barco, pelo que escolhe o barco 75% das vezes. A probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é 16.25%. A probabilidade de ir de barco e chegar atrasado é 11.25%. Qual a probabilidade de chegar atrasado sabendo que veio de barco?
5. Mostre que:

$$\mathbf{P\ (A \cup C|B) = P\ (A|B) + P\ (C|B) - P\ (A \cap C|B)}$$

ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

O conceito de probabilidade condicional permite-nos definir acontecimentos independentes, como sendo aqueles em que a informação acerca da realização de um dos acontecimentos não altera a probabilidade da realização de outro acontecimento. Assim o acontecimento A é independente do acontecimento B, com P(A)›0 e P(B)›0, se a probabilidade de A se verificar, é igual à probabilidade condicional de A se realizar, dado que B se realizou :

$$\mathbf{P(A) = P\ (A|B) \quad e \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

EXEMPLOS:

1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas, sem reposição, de uma caixa com 4 bolas brancas e 3 bolas pretas.
   1.1.1. Qual a probabilidade de saírem duas bolas brancas?
   1.1.2. Qual a probabilidade de sair bola branca na 2ªextração?
   1.1.3. Qual a probabilidade de sair bola branca na 2ªextração sabendo que saiu bola branca na 1ªextração?

1.1.4. Seja A o acontecimento "saiu exactamente uma bola branca" e B o acontecimento "saíram 2 bolas brancas".Prove que estes acontecimentos são disjuntos mas não independentes.

2. Tendo dois dados de 12 faces, em que cada um tem 7 faces vermelhas e 5 brancas, perguntou-se a 40 estudantes qual dos acontecimentos era mais provável, no lançamento dos dois dados:

i)Sair duas faces vermelhas, ou

ii)Sair uma face vermelha e uma branca.

Trinta e seis estudantes responderam que era mais provável sair duas faces vermelhas. Está de acordo? Justifique.